CURSUS BUITENSCHOOLSE EN GRAFISCHE METHODEN.

I

Voorlopig wordt geen gebruik van rekenmachines gemaakt. Ook nog niet van tafels en rekenlineaal. Het verdient aanbeveling de eerstvolgende vraagstukken door hoofdrekenen op te lossen. We behandelen het

Ruw schatten

van wiskundige grootheden en andere hoeveelheden.
Werk hierbij zo weinig mogelijk met tientallige en zoveel mogelijk met gewone breuken! Kies deze zodanig, dat ge van het verkleinen profijt kunt trekken. B.v. verdient het meestal geen aanbeveling het aantal dagen van het jaar af te ronden op 360, maar op $3/4 \cdot 10^3$ of $1/3 \cdot 10^3$.
$\pi = 22/7$ of $= \sqrt{10}$ is vaak een practischere approximatie dan de decimaalbreukenontwikkeling. Analoog $^{10}\log e \sim 10/23$. $\sqrt{2} \sim 7/5$ of $17/12$. $\sqrt{3} \sim 7/4$ of $12/7$. $\sqrt{5} = 9/4$. Voer getallen als b.v. 25 in de vorm $1/4 \cdot 10^2$ in producten in! Enz. Werk bij zeer grote en zeer kleine getallen met de schrijfwijze van een macht van 10 als factor!

De eerstvolgende vraagstukken behandelen het schatten in het dagelijks leven. Gegevens worden hierbij niet verstrekt. Raadpleeg hiervoor niet in encyclopedieën, maar tracht met iets gezond verstand eraan te komen.

1) Aantal seconden in 't jaar?
2) Het hoeveelste gedeelte van het aardoppervlak is nodig om alle mensen naast elkaar te plaatsen?
3) Inhoud van alle gebouwen op aarde? Hoeveelste gedeelte van de inhoud van de aarde?
4) Gezamenlijke rijtijd van alle personentreinen in Nederland per dag?
5) Hoeveel goederentreinen zijn nodig, om het gemiddelde dagelijks voedsel- en huisbrandstoffenverbruik (zonder drinkwater) in Nederland te bergen?
6) Gemiddeld dagelijks papierverbruik in Nederland (in ton)?

Bij het schatten van functiewaarden maakt men met succes gebruik van de 0-de en eerste term van hun Taylor-reeks.

B.v. $\sqrt{29} = \sqrt{25 + 4} = 5\sqrt{1 + 4/25} = 5.\ (1 + 2/25) = 5.4$

$\log 368 = \log (400-32) = \log 400 + \log (1 - 0.08) = 2.60 -$

$(10/23).0,08 = 2.56.$

$\sqrt[5]{e} = 1 + 1/5 = 1,2$

$5^{1,2} = 5\ (1 + 1/5 \text{ in } 5) = 5\ (1 + (1/5).(23/10).\ \log 5) = 6.5$.

Het gedrag voor grote n van sterk divergente reeksen schat men door de reeks in een integraal om te zetten. B.v.

$\sum_{1}^{N} i\, n^{i}$ gedraagt zich voor grote N als $\int_{1}^{N} x^{i}\,dx$, dus als $\frac{N^{i+1}}{i+1}$

Of door logarithmen ziet men, dat n! zich voor grote n gedraagt als $(n/e)^{n}$. Van de uit de hogere algebra bekende schattingen voor de reële wortels van een algebraische vergelijking kan ik er U geen enkele voor de practijk aanbevelen. Wel nuttig is vaak de regel van Descartes: Het aantal positieve wortels is ten hoogste gelijk aan het aantal tekenwisselingen; beide aantallen zijn gelijktijdig even of oneven. De bekendste formule is:

Alle wortels van $x^{n} + a_{1}x^{n-1} + \ldots + a_{n} = 0$ zijn absoluut kleiner dan de grootste onder de getallen $\sqrt[i]{n\,|a_{i}|}$

<u>Vervolg vraagstukken</u>. (Alleen schatten. Niet nauwkeurig berekenen).

7) $\sqrt[7]{\frac{3,489^{7,62} - 9,284}{\log 8088}} = ?$

8) $\left(\frac{\sqrt[393]{58,132 + 0,084}}{\pi^{2}} \right)^{3,3} = ?$

9) $\sin 16^{\circ} / \sin 15^{\circ} = ?$

10) $\left(\frac{\log 1001}{\log 1000} \right)^{7000} \gtreqless 2 ?$

11) $\binom{2000}{1000}$ (binomiaalcoëfficiënt)

12) $\prod_{n=1}^{100} n^{n} = ?$

13) De grootste waarde van $\frac{100\,x^{3}}{x^{4} + 1}$

CURSUS NUMERIEKE EN GRAFISCHE METHODEN.
II.

Nauwkeurigheid.

Numerieke en grafische gegevens en uitkomsten bezitten maar een beperkte nauwkeurigheid. Het is nuttig de fout te kennen en ev. aan te geven. Dit kan geschieden in de vorm: $2{,}734 \leq a \leq 2{,}748$ of $b = 17{,}16 \pm 0{,}23$.

De fout in de gegevens wordt formulefout (genoemd) door het rekenen komen hier fouten bij door afronden. Afronden betekent meestal een summand van de vorm $C.\ 10^p$ met $-1/2 \leq C \leq 1/2$ te verwaarlozen. Hierop is de volgende afspraak gebaseerd : wordt bij een zeker getal geen andere inlichting over de nauwkeurigheid verstrekt, dan behandelt men het zo alsof zijn gehele fout door afronden is ontstaan.
Voorbeeld a = 723,4985 betekent volgens deze afspraak

$$723{,}498\,45 \leq a \leq 723{,}498\,55.$$

Algemeen: een getal wordt als nauwkeurig beschouwd op een halve eenheid van het laatste opgeschreven cijfer na. LET op de betekenis van de nullen a/h eind:

a = 7,2 betekent $7{,}15 \leq a \leq 7{,}25$
a = 7,20 " $7{,}195 \leq a \leq 7{,}205$
a = 7200 " $7199{,}5 \leq a \leq 7200{,}5$

Wenst men uit te drukken dat in 7200 alleen het eerste en tweede cijfer te vertrouwen is, dan schrijve men: $a = 7{,}2 \cdot 10^3$, wat betekent $7{,}15.10^3 \leq a \leq 7{,}25.10^3$. Aan deze afspraak wordt echter niet consequent de hand gehouden.

We duiden de mogelijke fout van een grootheid p aan door $\delta p (\delta p \geq 0)$. De werkelijke waarde wordt dan geacht tussen $p - \delta p$ en $p + \delta p$ te liggen. Als k nauwkeurig bekend is dan geldt $\delta(ka) = k\delta a$. Verder geldt:

$\delta(a+b) = \delta a + \delta b$ en $\delta(ab) = a\delta b + b\delta a$ (dit met een onbelangrijke verwaarlozing). $\delta\phi(x_1, \ldots x_n) = \sum \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\delta x_i$

Relatieve of logarithmische fout $\Delta p = \delta p/p$. Deze fout is bijzonder gemakkelijk te overzien, wanneer men voor getallen de zg. standaard-notatie bezigt d.w.z. precies één cijfer 0 voor het decimaalteken als de ene factor en als de ander een macht van 10. Dus:

$$7269 = 7{,}269.10^3 \qquad 0{,}0007269 = 7{,}269.10^{-4}.$$

De relatieve fout $\Delta p = \delta \ln p = \delta p/p$ verandert niet bij vermenigvuldiging met een nauwkeurig bekend getal. De laatste twee getallen

bezitten dus de zelfde relatieve fout, te weten

$$1/2. \; / 7{,}269 \; .10^{-3} \approx 7.10^{-5} \; .$$

In standaardnotatie is dus de relatieve fout = (halve eenheid van de laatste expliciete decimaal): (het getal voor het decimaalteken). Bedient men zich niet van de standaard-notatie, dan moet men het aantal "significant digits" tellen, d.w.z. het aantal cijfers bij verwaarlozing van ev. nullen in het begin. Is dit n dan wordt de relatieve fout dus $1/2.10^{-n+1}$. (Eerste significante digits). Dezelfde n blijkt bij standaard-notatie uit het aantal cijfers achter het decimaalteken.

Absolute en relatieve nauwkeurigheid van functiewaarden kan men met behulp van differentiaalrekening in die van de argumenten uitdrukken.

$\Delta(ab) = \delta \ln a + \delta \ln b = \Delta a + \Delta b$

$\Delta(a/b) = \delta \ln (a/b) = \delta \ln a + \delta \ln b = \Delta a + \Delta b$

$\Delta(a^n) = n \, \delta a \quad = n \, \Delta a \; ; \; \Delta \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \Delta a$ (uiteraard als n nauwkeurig bekend is).

$\Delta e^a = \delta a, \quad \delta \ln a = \Delta a, \quad \delta \log a = \Delta a / \ln 10, \; \delta \sin a = \cos a \, \delta a$ etc.

Logarithmen in 5 decimalen zijn op $1/2.10^{-5}$. na nauwkeurig. Is bij elk getal kenbaar gemaakt, of afronding naar boven of beneden heeft plaats gehad, dan is de nauwkeurigheid dubbel zo groot. Hoe groot is de nauwkeurigheid van een logarithmisch berekend product ab van twee nauwkeurig bekende getallen a en b? Staat log a in de tafel dan is de nauwkeurigheid $1/2. \; 10^{-5}$. Moet log a tussen twee tafel-logarithmen geïnterpoleerd worden, dan kan de fout $\frac{1}{2}10^{-5}$ worden. Die van $p = \log a + \log b$ dus $10.^{-5}$. De relatieve fout van 10^p wordt dan $\ln 10. \; 10^{-5} \approx 5. \; 10^{-5}$. Bij standaard-notatie is dus de nauwkeurigheid van het logarithmisch berekende product een halve eenheid van de vierde decimaal of precieser: $2c. \; 10^{-5}$ als c het cijfer is voor de komma.

Welke fout ontstaat in het algemeen door het lineair interpoleren in de tafels? Laat de tafel een functie f(x) voorstellen met de maas h en interpoleer tussen de argumenten a en b met b-a = h, f(x) wordt dus in dit interval vervangen door een lineaire functie g(x) met de zelfde begin-en eindwaarden. De fout is een functie $p(x) = g(x) - f(x)$ met $p(a) = p(b) = 0$, die ik ook kan schrijven als $p(x) = c(x).(x-a)(b-x)$. De factor $(x-a).(b-x)$ bereikt zijn maximum ih het midden; dit is dus $\frac{h^2}{4}$; de factor c(x) zal practisch constant zijn en wel is $c = p''(x)/2 = g''(x)/2$ (de tweede afgeleide va g(x) verdwijnt). f" kan ik zonder moeite uit de tafel zelf vaststellen en wel is hij gelijk aan de tweede differentie (de differentie

van de differentie $\frac{1}{h^2}$). We kunnen dus zeggen: Fout bij lineaire interpolatie = 2e tafeldifferentie maal $\frac{1}{8}$.

Logarithmen in 5 decimalen hebben 2e tafeldifferenties 0 of 1 in de 5de decimaal; de lineaire interpolatie veroorzaakt dus een fout die verwaarloosd kan worden. Anders bij trigonometrische tafels. De tweede tafeldifferentie van log sin overschrijdt bij 1^o de 10 eenheden van de 5de decimaal; bij nog kleinere hoeken is hij nog veel groter. Voor zulke kleine hoeken bedient men zich dan ook van speciale tafels.

Ga bij interpolaties van tafels na of de voorwaarden voor lineaire interpolatie inderdaad vervuld zijn!

Ga ook anders bij gebruik van formules altijd na hoe deze formules gemodifeerd kunnen worden om met minder rekenwerk de zelfde nauwkeurigheid te bereiken.

Onderaan vindt U voor deze twee aanbevelingen voorbeelden.

Een voorbeeld voor de berekening van de nauwkeurigheid van de oplossingen van vergelijkingen is het volgende:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 .$$

Door impliciet te differentiëren met x,a,b,c als veranderlijken, vindt men de foutenrelatie:

$$f'(x)\,\delta x + x^2\,\delta a + x\,\delta b + \delta c = 0$$

waaruit men de fout van x berekent, nog voor men x nauwkeurig gaat berekenen.

<u>Vraagstukken</u>.

1) Met welke nauwkeurigheid is

$$\sqrt{\frac{(a-b)^3 . c}{d^3 + e^3} + k^5}$$

a = 17,00340 b = 2,9861588
c = 3,89 d = 839612,5
e = 2,7389 k = 2,5934

te berekenen en welke verwaarlozing kunt U met het oog hierop begaan? De uitdrukking behoeft niet te worden uitgerekend!

2) Hetzelfde voor

$$\sqrt[3]{\frac{a^b + c}{d} + e}$$

a = 2,00 b = 3,47 c = 360,1
d = 8,299 e = 200,000

3)
Met welke relatieve nauwkeurigheid kunt U sin 16^o - sin 15^o uit een tafel in 5 decimalen bepalen?

4) Bereken $\sqrt{1001} - \sqrt{1000}$ met een nauwkeurigheid van 5.10^{-5} .

5) Met welke nauwkeurigheid kunt U x en y bepalen uit:

$$\left.\begin{aligned} 27,0\ x - 14,23\ y &= 12,01 \\ 13,1\ x + 5,21\ y &= 42,00 \end{aligned}\right\} \quad |\delta x| \leq 0,007 \quad |\delta y| \leq$$

(x en y zelf behoeven niet nauwkeurig berekend te worden).

6) Hetzelfde voor:

$$\left.\begin{aligned} 18{,}1\ x + 12{,}1\ y &= 72{,}1 \\ 20{,}1\ x + 9{,}0\ y &= 48{,}5 \end{aligned}\right\} \quad |\delta x| \leqq 0{,}12 \quad |\delta y| \leqq 0{,}21$$

7) In de meeste logarithmentafels vindt U ook tafels voor n^2, n^3 $\sqrt{n}$ $\sqrt[3]{n}$ en $1/n$ (n=1,.... 1000). In welke van deze tafels zoudt U lineair interpoleren, en in welke niet? Hoe zoudt U in het laatste soort wel te werk gaan, en welke finesses zoudt U hierbij toepassen? Reken een zelf gekozen voorbeeld na!

8) De vergelijking $3\ x^5 - 45\ x^3 + 40\ x^2 - 245\ x + 860 = 0$, bezit twee wortels vlak bij x = 3 aan weerszijden van dit getal. Met welke nauwkeurigheid zoudt U deze kunnen berekenen, indien de coëfficiënten van de vergelijking maar met een nauwkeurigheid van 10^{-5} bekend zijn? De wortels behoeven niet te worden berekend!

NUMERIEKE EN GRAFISCHE METHODEN

III ~~en~~ IV

Snelle approximaties.

$\sqrt{D}$ moet berekend worden. Men begint met een approximatie b . Dan is ook a = D/b een approximatie. Het rekenkundig gemiddelde $b_1 = \frac{1}{2}(a+b)$ is een veel betere approximatie. Hierop past men hetzelfde procédé toe. De methode convergeert zeer snel. We kunnen ook schrijven $b_1 = b - \Delta/2b$ indien we stellen $\Delta = b^2 - D$. Dat is niet anders dan het begin van de Taylorreeks :

$$\sqrt{D} = \sqrt{b^2 - \Delta} = b\sqrt{1 - \Delta/b^2} \sim b(1 - \Delta/2b^2) = b - \Delta/2b .$$

Hoe nauwkeurig is de nieuwe approximatie?

Stel $\sqrt{D} = b + \delta \rightarrow D = b^2 + 2b\delta + \delta^2 \longrightarrow \delta \sim \frac{D - b^2}{2b}$

Stel nu $D = b + \frac{D - b^2}{2b} + \delta_1 = b_1 + \delta_1 \longrightarrow b_1 = b + \frac{1}{2b}(\sqrt{D}+b)(\sqrt{D}-b)$

$= b + 1/2b\,(2b + \delta)\delta = b + \delta + \delta^2/2b = \sqrt{D} + \delta^2/2b \qquad \delta_1 = -\delta^2/2b$

en de fout neemt dus kwadratisch af.

Meetkundige interpretatie van het procédé: een rechthoek met de zijden a=D/b en b moet tot een vierkant (dus met zijde $\sqrt{D}$) worden gemaakt.
Men neme als approximatie voor de zijde $\frac{a+b}{2}$ enz.

Analoog voor derdemachtswortels. Om $\sqrt[3]{D}$ te berekenen vatte men het getal D op, als de inhoud van een blok met ribben a,b en c. Men dele de oppervlakte van het gemiddelde zijvlak door de gemiddelde ribbe, dus

$$\frac{ab + bc + ca}{a + b + c}$$

Als a een eerste approximatie is, dan kiezen we b.v. a = b en $c = \frac{D}{a^2}$. Dat geeft

$$a_1 = a\,\frac{a^3 + 2D}{2a^3 + D}$$

als nieuwe approximatie. Stellen we $\sqrt[3]{D} - a = \delta$ en $\sqrt[3]{D} - a_1 = \delta_1$ dan vindt men

$$\delta_1 = \frac{\delta^3(2a + \delta)}{2a^3 + D} \sim \frac{\delta^3}{a^2 + \frac{D}{2a}}$$

en de iteratiemethode convergeert dus snel, beter dan de eerste benadering uit de Taylorreeks. Deze zou zijn

$$\sqrt[3]{D} = a\sqrt[3]{1 + \frac{\Delta}{a^3}} \sim a + \frac{\Delta}{3a^2}$$

Voor de berekening van $\sqrt[n]{D}$ beschouwt men een n-dimensionaal blok met (n - 1) ribben a, en één ribbe $D:a^{n-1}$. We berekenen de gemiddelde inhoud van het p- dimensionale zijvlak. Deze is

$$I_p = \frac{\binom{n-1}{p}\,a^n + \binom{n-1}{p-1}a^{p-1}\,\frac{D}{a^{n-1}}}{\binom{n}{p}}$$

Een goede benadering van D is nu de verhouding

$$\frac{I_p}{I_{p-1}} = \frac{p}{n-p+1}\,\frac{(n-p)(n-p+1)a^n + p(n-p+1)D}{p(n-p+1)a^n + p(p-1)D}\,a$$

waarbij men over p mag beschikken, b.v. $p = \frac{n+1}{2}$

$$\frac{n+1}{n-1}\,\frac{(n-1)a^n + (n+1)D}{(n+1)a^n + (n-1)D}\,a$$

Kettingbreuken.

Als men met een breuk zoals 62/215 nog iets wil beginnen, ligt het voor de hand, de omgekeerde 215/62 te bekijken. Die is ~ 3, dus de gegeven breuk $\sim 1/3$. Nauwkeuriger: $215/62 = 3 + 29/62$. Dus

$$\frac{62}{215} = \frac{1}{3 + 29/62}$$

Met 29/62 kan men hetzelfde doen. $62/29 = 2 + 4/29$, dus

$$\frac{62}{215} = \frac{1}{3+\cfrac{1}{2+4/29}}$$

Dit procédé kan men voortzetten. Tenslotte

$$\frac{62}{215} = \frac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7+1/4}}}$$

Zoiets noemt men een kettingbreuk en schrijft het korter.

$$\frac{62}{215} = \frac{1}{3+} \quad \frac{+1}{2+} \quad \frac{+1}{+7} \quad \frac{+1}{4}$$

of nog korter

$$(\,o\,;\,3,\,2,\,7,\,4)$$

(met de o voor de ; zijn de helen bedoeld)
De getallen 3, 2, 7, 4 heten de kettingbreuknoemers. Ze worden het gemakkelijkst verkregen volgens het schema

	1	4	29	62	215
		4	29	62	215
	4	28	58	186	
	o	1	4	29	

Dus 62 op 215 delen, quotient boven plaatsen; 62 op de rest delen enz.! Breekt men een kettingbreuk ergens af, dan krijgt men een "benaderende kettingbreuk". Ook irrationale getallen kan men in kettingbreuken ontwikkelen; deze zijn oneindig.
Zij t een getal en

$$t = (a_o\,;\,a_1\,,\ldots,\,a_{p-1}\,,x_p\,)$$
$$= (a_o\,;\,a_1\,,\ldots,\,a_{p-1}\,,\,a_p\,,\,x_{p+1}\,)$$

op elkaar volgende kettingbreukontwikkelingen van t; de a_i zijn geheel, x_p en x_{p+1} zullen over 't algemeen niet geheel zijn.
Dus $t = a_o + \frac{1}{x_1} = a_o + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{x_2}}$

We kunnen ook schrijven $t = \frac{a_p x_1 + 1}{x_1}$

Algemeen trachten we te schrijven

$$t = \frac{A_p x_p + B_p}{C_p x_p + D_p} \qquad \begin{pmatrix} A_1 = a_o\,, & B_1 = 1 \\ C_1 = 1\,, & D_1 = o \end{pmatrix}$$

Substitutie $x_p = a_p + 1/x_{p+1}$ geeft

$$\frac{A_p(a_p + 1/x_{p+1}) + B_p}{C_p(a_p + 1/x_{p+1}) + D_p} = \frac{(A_p a_p + B_p)x_{p+1} + A_p}{(C_p a_p + D_p)x_{p+1} + C_p}$$

Dit moet zijn $= \frac{A_{p+1} x_{p+1} + B_{p+1}}{C_{p+1} x_{p+1} + D_{p+1}}$ dus

in de zin van matrixvermenigvuldiging $\begin{pmatrix} A_{p+1} & B_{p+1} \\ C_{p+1} & D_{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_p & B_p \\ C_p & D_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_p & 1 \\ 1 & o \end{pmatrix}$

(III,3)

Hieruit volgt

$$(*)\qquad \begin{pmatrix} A_{p+1} & B_{p+1} \\ C_{p+1} & D_{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_o & 1 \\ 1 & o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & o \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_p & 1 \\ 1 & o \end{pmatrix}$$

De p-de benaderende kettingbreuk verkrijgen we door $x_{p+1} = \infty$ te stellen.

Dus dit is $= \dfrac{A_{p+1}}{C_{p+1}}$ met A_{p+1} en C_{p+1} uit de eerste kolom van de matrix(*)

$B_{p+1} = A_p$, $D_{p+1} = C_p$ dus $\begin{cases} A_{p-1}+a_p A_p = A_{p+1} \\ C_{p-1}+a_p C_p = C_{p+1} \end{cases}$

Hieruit volgt een schema om de benaderende kettingbreuken te berekenen:

	3	2	7	4			a_1	a_2	a_3	....
1	o	1	2	15	62	1	a_o	.	.	....
o	1	3	7	52	215	o	1	.	.	....

Eerste rij bevat de kettingbreukknoemers. In de eerste kolom wordt hieronder a_o en 1 opgeschreven; hiervóór 1 en o. Dan wordt stapsgewijs elke kolom met de noemer, die boven staat, vermenigvuldigd en bij de voorafgaande opgeteld om de volgende te verkrijgen.

1/3, 2/7, 15/52, 62/215 zijn de benaderende kettingbreuken.

Kettingbreuken geven uitstekende approximaties: Trekt U twee op elkaar volgende benaderingen van elkaar af, dan krijgt U: teller $\pm$ 1, noemer = product van de twee noemers, dus het kleinst mogelijke verschil tussen breuken met deze noemers. Dit berust hierop dat de teller de determinant

$$\begin{vmatrix} A_p & B_p \\ C_p & D_p \end{vmatrix}$$

dus volgens (*) product van determinanten -1 is.

Is $t = (o; a_1, \ldots\ldots, a_i, a_1, \ldots\ldots, a_i, \ldots\ldots)$ repetent, dan is

$t = (o; a_1, \ldots\ldots, a_i, t)$ of $t = \dfrac{A_i t + B_i}{C_i t + D_i}$

en hieruit volgt, dat t oplossing van een vierkantsvergelijking met gehele coefficienten is. Dit geldt ook, als de periode later begint. Ook het omgekeerde van deze stelling geldt. (Zonder bewijs).

Ontwikkeling van vierkantswortel in kettingbreuk.

<u>Voorbeeld</u>: t = 2

We zoeken het grootste gehele getal $<$ 2. Dat is 1 .

$t = \sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2}-1) = 1 + 1/x_1$

$x_1 = 1/(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2} + 1 = 2 + 1/x_2$

$x_2 = 1/(\sqrt{2}-1)$ enz.

Dus $\sqrt{2} = (1; 2; 2; 2; \ldots)$

<u>Voorbeeld:</u> t = $\sqrt{7}$. $t = 2 + 1/x_1$

$x_1 = 1/(\sqrt{7}-2) = (\sqrt{7}+2)/3 = 1 + 1/x_2$

$x_2 = 3/(\sqrt{7}-1) = (\sqrt{7}+1)/2 = 1 + 1/x_3$

Voorbeeld:

$x_3 = 2/(\sqrt{7}-1) = (\sqrt{7}+1)/3 = 1+1/x_4$

$x_4 = 3/(\sqrt{7}-2) = \sqrt{7}+2 = 4+1/x_5$

$x_5 = 1/(\sqrt{7}-2)$ repetent

$7 = (2; \overline{1; 1, 1, 4}...)$

Oplossing van algebraische vergelijking door kettingbreuk.

Voorbeeld:

$x^3-x-1 = 0$. De positieve wortel is iets groter dan 1. Dus

$x = 1+1/x_1$ substitueren!

$x_1^3-2x_1^2-3x_1-1 = 0$. De positieve wortel is iets groter dan 3.

Dus $x_1 = 3+1/x_2$,

enz.

We zullen dit procédé later met een ander combineren, om vergelijkingen practisch op te lossen.
Ook kettingbreuken met minustekens zijn nuttig. Bij de vergelijking $x^3-3x^2+1=0$ begint men beter met de substitutie $x=3-1/x_1$ enz.

Nog algemener bezigt men kettingbreuken met tellers 1:

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1+} + \frac{b_2}{a_2+} + \frac{b_3}{a_3+} \cdots\cdots$$

Om hiervan de benaderende kettingbreuken uit te rekenen, bedient men zich van het schema

o-de	1-ste	2-de	3-de	... kolom
b_1	b_2	b_3	b_4	...
	a_1	a_2	a_3	...
1	a_0			
o	1			

De 1-de kolom wordt aangevuld door op te tellen: b_{i-1} maal (i-2)-de kolom plus a_{i-1} maal (i-1)-de kolom. In de laatste twee rijen staan teller en noemer der benaderende kettingbreuken.

Vraagstukken.

1) Bereken $\sqrt{3}$, 1 op 10 decimalen nauwkeurig. 2) Bereken $\sqrt[3]{2}$ op 5 dec.
3) Bereken enige benaderingsbreuken van $\sqrt{2}$ uit.
4) Hetzelfde voor $\sqrt{7}$.
5) Bereken de kettingbreuknoemer van $\sqrt{19}$ (volle periode)!
6) Voer de behandeling van $x^3 - x - 1 = 0$ enige stappen verder!
Reken enige benaderingen uit!

7) Bereken enige benaderingen van e uit de kettingbreuk

$$\frac{e-1}{2} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\ldots}}}}$$

CURSUS NUMERIEKE EN GRAFISCHE METHODEN

IV

Kleine wenken voor het practisch rekenen.

1. Optellen en aftrekken kan soms beter van links naar rechts geschieden. Vooral bij het vormen van het rekenkundig gemiddelde.

2. Idem bij vermenigvuldiging. B.v. met 2489 als vermenigvuldiger. Begin met 2, dan verdubbelen, nog eens verdubbelen, vermenigvuldiger optellen.

3. Of ook in het midden beginnen. B.v. met 28735. Begin met 7!

4. $46^2 = (46 + 4) \times (46 - 4) + 16 = 50 \times 42 + 16 = 2116$

5. Bij berekeningen, waarin veel kwadraten voorkomen, zodat men kwadraattafels gebruikt, producten berekenen volgens

$$a.b = (a+b)^2/2-(a-b)^2/2$$

6. Bij staartdeling quotient boven deeltal plaatsen! Elk cijfer van quotient boven het zojuist aangehaalde!
Op die manier is vergissing uitgesloten. Voorbeeld:

```
          183
4021 / 738296
       4021
       33619
       32168
        14516
        12063
         2453
```

7. Analoge plaatsing bij vermenigvuldiging. B.v. vermenigvuldigtal evt. op verschuifbare strook plaatsen!

```
7,4328
    1,9614 x
-------------
   ...
```

8. Negenproef: cijfersom.
Elfproef: Alternerende cijfersom.
101-proef: cijfers in groepen van twee (van achteren te beginnen) samenvatten; alternerend optellen.

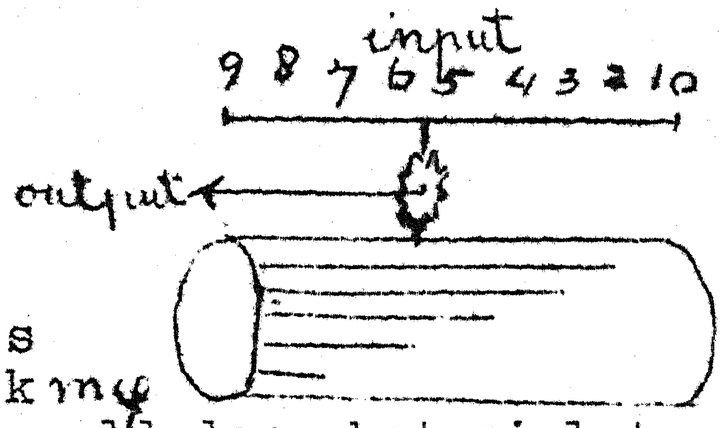
9. Afgerond vermenigvuldigen. Hieronder verstaat men: reeds bij het vormen van de partiele producten degenen te verwaarlozen, die op late decimaalplaatsen komen te staan. Voorbeeld:

```
7,4328
    1,9614 x
-------------
7,4328
6 68952
  445968
    7432
    2972
-------------
14,5787
```

Het is voldoende met 2 - 3 decimalen meer te rekenen dan men wenst te verkrijgen.

HANDREKENMACHINES.

Beginsel van Staffelwals.



De wals bezit 10 tandstroken van verschillende lengte en met de hoekafstand φ . Bij omwenteling van de wals wordt het wieltje zolang meegenomen, tot het geen tandstrook meer ontmoet, dus naar gelang van de plaats m waar het zich bevindt, over een hoek $m\varphi$. Het getal m wordt vanuit de input geregeld door het wiel te verschuiven. De hoek, waarover het wieltje daardoor draait, wordt in de output overgebracht. Voor elke decimaal is een dergelijke wals vereist. In de input wordt een getal ingesteld en door een volledige draaiing van alle walsen naar de output overgeheveld. Stelt men daarna een tweede getal in de input in en brengt het door draaiing in dezelfde richting in de output over, dan zijn die getallen opgeteld. Hierbij is een overdracht van tientallen nodig. Dit geschiedt zo, dat bij overschrijden van de 9 een hefboompje de volgende wals over de hoek φ verder draait. Voor de practische doorvoering van die overdracht is het nodig, dat elke wals op de voorafgaande enigszins "wacht". Dat wordt zo opgelost, dat de tandstroken maar een kleine sector van de walsmantel overdekken en bij elke volgende wals een zekere "vertraging" bij de voorafgaande vertonen. Dat is het beginsel van een machine van Leibniz. Bij een andere machine werkte hij met schijven (i.p.v. walsen), voorzien van uitschuifbare tanden. Beide methoden zijn later telkens toegepast, vooral de tweede (Brunsviga, Odhner, Facit); de eerste in "Archimedes".
Andere typen werken met proportionaaloverdracht door tandbeugels of met wieltjes, die met verschillende snelheid draaien (Marchant).
Bij de modellen met uitschuifbare tanden geschiedt het instellen met pennen of door toetsen (Facit). De tweede methode is veiliger, omdat het resultaat van de instelling duidelijk zichtbaar is; maar hierbij is de instelling zo omslachtig, dat sommige kunstgrepen bij het mathematisch rekenen hierdoor practisch onmogelijk worden.
Optellen van getallen geschiedt door rechtsdraaien; aftrekken door de aftrekker met een linksdraaing van de input in de output te brengen. Vermenigvuldigen geschiedt door herhaald optellen. Om hierbij de uitkomsten op de juiste plaats in de output te brengen zijn in- en output tegen elkaar verschuifbaar. Om het aantal omwentelingen te tellen, bezit de machine een telwerk, dat eveneens rekening houdt met de wederzijdse verplaatsing van in- en output. Na afloop van de vermenigvuldiging is de vermenigvuldiger in het telwerk verschenen.
Het delen geschiedt door herhaaldelijk aftrekken. Het deeltal wordt van de input naar de output gebracht. Daarna de deler in de input. Van links beginnend trekt men de deler zo vaak af, tot het niet meer mogelijk is. Als men deze grens overschrijdt, wordt men door een belletje gewaarschuwd; men ziet trouwens ook vóór de plaats, die net in bewerking is negens verschijnen. Men kan dan de laatste omwenteling ongedaan maken, door rechts te draaien. Heeft men de deler zo vaak mogelijk afgetrokken dan verschuift men dewagen om verder links af te trekken.
De omwentelingen worden in het telwerk geteld. Dit bevat tenslotte het quotient. In de output staat de rest. Wil men die opnieuw bewerken, dan moet men hem links weer instellen.
Alle handrekenmachine-typen zijn practisch 50 jaar oud. Ze zijn in die tussentijd vrijwel onveranderd gebleven. Ze laten veel te wensen over. Er zouden geheel nieuwe typen moeten worden ontwikkeld, maar de concurrentie van de electrische machines schijnt dit niet te gedogen. Het zou b.v. wenselijk zijn, dat een rekenmachine uit drie

volkomen gelijkgerechtigde omwentelingswerken zou bestaan, waarvan dus elk als input, als output èn als telwerk dienst deed. Men zou niet genoodzaakt zijn b.v. een quotient, die bij iets opgeteld moet worden over te schrijven en opnieuw in te stellen.
Een der machines op de "Utrecht" "Odhner M 602/7" bezit zulk een snufje, een "kubeerinrichting" (rechts onderaan), waardoor een getal uit de output in de input kan worden overgeheveld. Hierdoor kan men zich b.v. bij de berekening van voortlopende producten of hoge machten met succes bedienen. Verdere bijzonderheden van de machines (b.v. de uitveeginrichtingen) behandel ik hier verder niet, omdat zij bij de onderscheiden typen zeer uiteenlopen.
Electrische machines behandel ik niet nader. Een nadeel van deze machines vergeleken met handmachines is, dat zij veel meer aan haperingen onderworpen zijn, en dat zij vrij langzaam werken. In de laatste tijd is er veel aan gewerkt, om de gang van deze machines te bespoedigen.
B.v. hebben de in de Hollerith-machines gebruikte multipliers inhaerente tafels van vermenigvuldiging (ook dit beginsel is al oud) om deze simultaan te kunnen plaatsen brengen ze van elk elementair product de eenheid en het tiental in verschillende telwerken onder deze uitkomsten worden pas na voltooiing van alle elementaire producten bij elkaar opgeteld. Dit geeft een zeer grote bespoediging. Bij de meeste electrische machines kan men de volgende som gedeeltelijk al instellen, terwijl de voorafgaande nog aan de gang is. Ook dit geeft enige bespoediging.

<u>Snufjes bij het werken met handrekenmachines</u>.

1. Vermenigvuldiging met b.v. 8 vervangen door twee keer aftrekken van het vermenigvuldigtal en daarna 10 keer optellen. Tijdbesparing gemiddeld bijna de helft.

2. Analoog bij het delen. Heeft men te ver gedraaid, dan hoeft men niet terug te draaien, maar kan bij de volgende decimaal optellen, tot weer vooraan nullen verschijnen. (Ook waarschuwing door belletje). Systematisch kan men steeds zo werken, dat de rest kleiner dan de helft van de deler is. Tijdbesparing bijna de helft.

3. Men kan 2 getallen, die niet te lang zijn, gelijktijdig met dezelfde vermenigvuldiger vermenigvuldigen, door ze met enige tussenruimte naast elkaar in de input te plaatsen.

4. Delen door met de omgekeerde te vermenigvuldigen.

5. (125 x 48) / 15. In input 150000125 plaatsen. Door herhaaldelijk optellen van de 15 in de output een 48 maken. Dan wordt uit de 125 een (125 x 48) / 15.

6. Gebruik van de cubeer-inrichting.

7. Berekening van vierkantswortel.

   $\sqrt{}$29/67/83/27/ Getal in de output. Trek van de 29 achtereenvolgens de oneven getallen af, 1+3+5+7+9. Het telwerk noteert 5. Output thans 4/67/83/27. Neem het dubbele van die 5 (of 9+1), hang er de oneven getallen aan en trek dit achtereenvolgens van de volgende plaats af, dus 101+103+105+107 = 416. Het telwerk noteert 4 rechts van de 5. Output 51/83/27. Neem het dubbele van 54 (of 107+1); hang er de oneven getallen aan; trek af. Dus 1081+1083+1085+1087 = 4336. Telwerk 544. Output 8/47/27.

Aftrekken 10881+10883+10885+10887+10889+10891+10893. Telwerk 5447 (is de vierkantswortel); output 8518 is de rest - kan desnoods verder bewerkt (Niet geschikt voor Facit-machines).

8. Delen door lang getal, a:b, b b.v. = 245731.
Men dele eerst beide door b.v. 2458. De nieuwe deler wordt een getal $1-\delta$, zeer klein. $1/(1-\delta) = 1+\delta+\delta^2+\ldots$

De sommen groep A niet afleveren! Deze kunnen zelf gecontroleerd en zijn geschikt voor het <u>eerste</u> leren van het gebruik van rekenmachines.

A. 824 + 176 = 1000
176 + 824 = 1000
824 10 keer optellen
1734 - 735 = 999
0 - 1 = 9999.....9
Van 8240 10 keer 824 aftrekken.
4 x 25 = 100
8 x 125 = 1000
16 x 625 = 10000
25 x 4
125 x 8
625 x 16
824 x 176 = 145024
176 x 824 = 145024

1 : 3 = 3333....
1 : 7 = 142857142...
1 : 429 = 0,0023310...
2222222 : 37 = 6006006...
145024 : 176 = 824
145024 : 824 = 176
184041 : 429 = 429
$429^2 = 184041$
$429^3 = 7895389$
$\sqrt{184041} = 429$

Tracht deze sommen op verschillende manieren te behandelen!

B. $0,429^6$ (alle decimalen).
Omgekeerde hiervan (evenveel decimalen).
1 : 1,23456789 (tien significant digits).
$\sqrt{18,4}$ (zes significant digits)
$\sqrt[3]{789}$ (" / " ")
Enige decimalen van e uit $\frac{e-1}{2} = 1 + \cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+}}}}$.
Enige naderende kettingbreuken van $\frac{\sqrt{3}}{1,73} = \frac{30103}{47712}$
Oplossen $x^2 - 2,01\,x + 1 = 0$ (8 decimalen)

NUMERIEKE EN GRAFISCHE METHODEN V

Lineaire vergelijkingen matrices.

Dit hoofdstuk is uit practisch oogpunt het meest af, en wel in hoofdzaak door de onderzoekingen van C. Aitken.(Proceed.Roy.Soc. Edinburgh 46(1925) 80-90; 57(1936), 172-181,269-304; 62(1945), 138-146). Een met de nodige reserves te bestuderen algemeen overzicht bij H. Hotelling, Annals Math.Stat. 14(1943), 1-33. Zie ook E. Bodewig, Proc.Ak.A'dam 50(1947),49-57. Van de overige literatuur is zeer veel waardeloos. Voor de grondslagen van de theorie van determinanten en matrices wordt aanbevolen het boekje van Dr Heyting: F . We zullen nu behandelen: het oplossen van lineaire vergelijkingen; het berekenen van determinanten en inversen van matrices; het berekenen van eigenwaarden. De theorie van het schatten van de invloed van formule- en afrondingsfouten staat nog in de kinderschoenen.

De practijk van het oplossen van lineaire vergelijkingen berust niet op de regel van Cramer. Men bedient zich veeleer van systematische eliminatie. Dit geldt meestal reeds bij twee onbekenden:

$$a_1x+b_1y = c_1$$
$$a_2x+b_2y = c_2$$

Dus b.v. de eerste vergelijking door a_1 delen, met a_2 vermenigvuldigen, van de tweede aftrekken. Hierdoor wordt y bepaald. Dit in de door a_1 gedeelde eerste vergelijking substitueren. Controle: substitutie in de tweede verg. Meestal wordt aangeraden eerst a_1/a_2 te berekenen en met de eerste vergelijking te vermenigvuldigen. Met de rekenschuif heeft de laatste methode zekere voordelen, doch overigens verlocpt de berekening niets sneller. Verder wordt meestal aangeraden de eerste deling uit te voeren met die coefficient onder a_1, b_1, a_2, b_2, die absoluut het grootst is. De fout zou hierdoor verkleind worden. De redenering, waarmee dit gemotiveerd wordt is een aaneenschakeling van denkfouten. De formule-fout kan hierdoor in geen geval geraakt worden. Van invloed kunnen alleen de afrondingsfouten zijn. Die worden bij zulke eenvoudige berekeningen vermeden door practisch exact, d.w.z. met veel decimalen te rekenen. Er wordt echter veelal als volgt geredeneerd: Stellen wij $q = a_2/a_1$ dan wordt

$$y = \frac{c_2-qc_1}{b_2-qb_1}$$

In de fout van y treedt die van c_2 en van b_1 op, vermenigvuldigd met q ,dat dus zo klein mogelijk dient te worden gekozen. Bij deze redenering wordt de q in teller en noemer als van elkaar onafhankelijk behandeld, dus alsof de q in teller en noemer naar tegengestelde kant zou kunnen varieren. Vaak zal men bij het schatten van de fout inderdaad op deze grove manier te werk gaan, en dan zal men naar gelang van de coefficient, waarmee men begint (weliswaar dezelfde uitkomsten) maar uiteenlopende schatting van de fout verkrijgen; die zijn dan alleen te wijten aan de slechte schatting van de fout. De verschillen zijn als volgt te overzien: We behoeven ons alleen met de fout van q te bemoeien, omdat deze alleen twee maal optreedt.

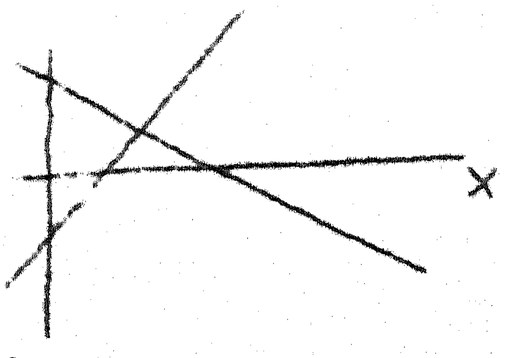
$$\delta y = \left| \frac{-(b_2-qb_1)c_1\delta q+(c_2-qc)b_1\delta q}{(b_2-qb_1)^2} \right|$$

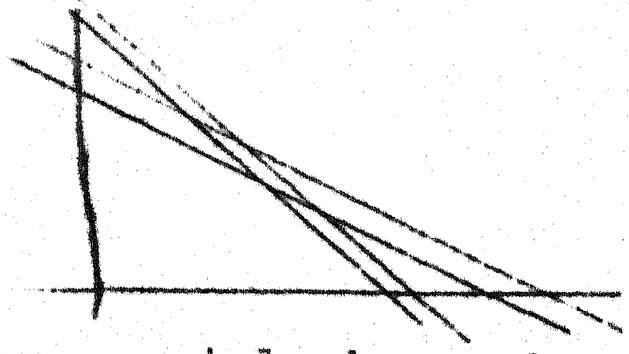
is de zorgvuldige schatting van de fout in y tengevolge van die in q.

F Matrices en Determinanten.

Bij de grove methode kan men aan die twee δq onafhankelijke waargeven. Dat kan geen kwaad als beide coefficienten van δq hetzelfde teken bezitten, dus als b_1,y het tegengestelde teken bezit van c_1. In dat geval kan men zich dus van de ruwe schatting van de fout bedienen. Conclusie voor de practijk: Men schatte eerst de oplossing. Men zoeke onder de producten $a_1.x$, $a_2.x$, b_1y, b_2y één, dat het tegengestelde teken bezit, als de bijbehorende bekende term. Is dit resp. $a_1.x$, $a_2.x$, $b_1.y$, $b_2.y$ dan beginnen we met de deling door resp. b_1, b_2, a_1, a_2. In dat geval kan men de fout zonder nadeel met de ruwe methode bepalen. Een dergelijke keuze behoeft niet altijd mogelijk te zijn. Dan is over 't algemeen beter, dat men de fout volgens de nauwkeurige methode schat met bovenstaande formule voor δy.

In de grafieken van de vergelijkingen kan men de regel ook als volgt uitdrukken. Men begint met die vergelijking, waarbij op de grafiek de oplossing niet tussen de snijpunten met de assen ligt. Men dele door de coefficient van x resp. y al naar gelang het snijpunt met x- resp. y-as dichter bij de oplossing ligt. Is deze keuze niet mogelijk, dan zullen de rechten elkaar onder een betrekkelijk kleine hoek snijden en dan moet men helemaal voorzichtig zijn met alle kwesties van nauwkeurigheid.





Het "parallelogram", waarin de enigszins aangedikte rechten elkaar snijden krijgt dan grote afmetingen.

Reeds bij drie onbekenden worden deze kwesties onoverzienbaar lastig. We komen hierop later terug. Als de vergelijkingen geen speciale kenmerken vertonen, die voor bepaalde oplossingswegen pleiten, dan is het aan te bevelen, geen bijzondere kunstgrepen toe te passen, zoals er in de literatuur vele aanbevolen worden. De kleine tijdsbesparing weegt niet op tegen de grotere veiligheid van een systematisch procédé. Het systematische eliminatie procédé, "pivotal condensation" (pivot is: vleugelman), is reeds door Gauss toegepast, maar wordt telkens opnieuw ontdekt, wanneer blijkt, dat alle kunstgrepen niet voldoen, en wordt dan telkens naar de laatste ontdekker genoemd. De gewone manier is als volgt:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

Schema:

$$\begin{array}{cccc} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}$$ 1)

Eerste rij door a_1 delen, met a_2 resp. a_3 vermenigvuldigen, van de tweede resp. derde aftrekken. Eerste rij een kolom verwaarlozen.

---

1) Om bij pivotal condensation de berekening voortdurend te kunnen controleren, wordt aanbevolen de som van elke rij als extra kolom door alle operaties mee te nemen.

Het resterende gedeelte analoog behandelen. Hierdoor wordt tenslotte z verkregen (ook de determinant $|a_i\ b_i\ c_i|$ wordt trouwens op deze manier verkregen. Een systematisch procédé levert x, y, z tegelijk. Dit gaan we thans uiteenzetten.

Men kan een stel onbekenden als een matrixxvan één kolom opvatten. Hetzelfde kan men met de bekende termen doen: een kolom c. Noemt men de coefficientenmatrix A, dan kan men het stelsel lineaire vergelijkingen ook schrijven als:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \\ c_m \end{pmatrix}$$

of

$$Ax = c$$

Bij het rekenen met matrices kent men het begrip optellen van matrices (d.w.z. elementsgewijze optellen), vermenigvuldigen met een scalar (elk element wordt met die scalar vermenigvuldigd) en het vermenigvuldigen van matrices. Als A.B = C dan geldt $c_{ik} = \sum_l a_{il} b_{lk}$. De i-de rij van A vermenigvuldigd met de k-de kolom van B levert dus c_{ik}. Nodig is dat A evenveel kolommen heeft als B rijen. C heeft het aantal rijen van A en het aantal kolommen van B

Wanneer de determinant van een vierkante matrix ongelijk o is, dan kan men de inverse matrix vormen, d.w.z. de matrix, die, vermenigvuldigd met de oorspronkelijke matrix, de zgn. eenheidsmatrix oplevert.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Deze eenheidsmatrix wordt met 1 aangeduid. De O-matrix, die slechts nullen bevat, wordt aangegeven met O. Nu geldt

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} A = 1$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

Een belangrijk proces is ook het spiegelen aan de hoofddiagonaal (transponeren). We duiden de gespiegelde aan met A'

$$(AB)' = B' A'$$

Het matrix-vermenigvuldigen kan vereenvoudigd worden door "partitioning"

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\,E + B\,G & A\,F + B\,H \\ C\,E + D\,G & C\,F + D\,H \end{pmatrix}$$

A, B, enz. zijn hierin weer matrices. Aan deze formule ziet men duidelijk dat de vermenigvuldiging van matrices niet commutatief is, d.w.z. dat de matrix AB en de matrix BA meestal zullen verschillen.

Een belangrijke formule voor partitioning is verder

$$\begin{pmatrix} P & \varphi \\ R & S \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -P^{-1}\varphi S_1^{-1} \\ 0 & S_1^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ -RP^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

als $S_1 = S - RP^{-1}Q$

Gegeven een matrix, (die niet kwadratisch behoeft te zijn)

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_m \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{11} is de pivot van de eerste rij. We vervangen de rij door het quotient met a_{11} dus

$$\frac{1}{a_{11}}\begin{pmatrix} 1 & a_{12}/a_{11} & a_{13}/a_{11} \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

a_{i1} -maal eerste rij van de i-de aftrekken. Eerste rij en kolom schrappen

$$\frac{a_{22}-a_{21}\cdot a_{12}/a_{11}}{\quad}\begin{pmatrix} a_{22}-a_{21}\cdot a_{12}/a_{11}, & a_{23}-a_{21}\cdot a_{12}/a_{11}, \cdots \\ a_{32}-a_{31}\cdot a_{12}/a_{11}, & a_{33}-a_{31}\cdot a_{12}/a_{11}, \cdots \end{pmatrix}$$

Dit analoog behandelen. De "pivot"altijd links noteren. Zo gaan wij door tot en met b.v. de p-de rij. Dan staan in het eerste stuk hoofddiagonaal $a_{11}\ a_{22} \ldots\ldots a_{pp}$ van de nieuwe matrix N alleen éénen en daaronder nullen.

Bekijken wij nog eens de eerste stap. Laten we eerste rij en eerste kolom niet weg, dan komt deze stap hierop neer, dat de gegeven matrix M van links is vermenigvuldigd met de m- bij m-matrix

$$\begin{pmatrix} 1/a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21}/a_{11} & 1 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ -a_{m1}/a_{11} & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Bij de volgende stap wordt vermenigvuldigd met iets dergelijks, n.l.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & 0 & & 0 \\ 0 & * & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & * & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

De sterretjes duiden termen aan, die in het algemeen niet nul of één zijn. De derde stap is links vermenigvuldigd met een matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \\ 0 & 0 & * & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Na p stappen hebben we in het geheel vermenigvuldigd met een matrix van het type

$$P = \begin{pmatrix} * & & 0 & 0 & & 0 \\ * & \ddots & & & & \\ \vdots & & * & 0 & & 0 \\ & & * & 1 & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & 0 & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & & 0 \\ & & \\ * & & 1 \end{pmatrix}$$

(P is p-bij-p-matrix met boven de hoofddiagonaal nullen) en hierbij ontstaat

$$P\ M = N = \begin{pmatrix} N & * \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

(N heeft onder de hoofddiagonaal nullen.

Bij de pivotal condensation wordt verondersteld, dat de elementen waardoor ik deel $\neq 0$ zijn. Hun product is echter dedeterminant van de eerste m rijen en kolommen van M en die zal in de regel $\neq$ worden verondersteld.

Om de vergelijking $Ax = c$ op te lossen, vormen we

$$\begin{pmatrix} A' & -1 \\ c' & 0 \end{pmatrix}$$

(-1 betekent de negatieve eenheidsmatrix van m-bij-m; c' is een rij van m elementen; 0 evenzo). Hierop passen we pivotal condensation toe tot en met de m-de rij. Dus

$$\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ p' & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & -1 \\ c' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ pA' + c' & -p' \end{pmatrix}$$

Hier moet $p'A' + c' = 0$ zijn, dus

$$Ap + c = 0$$

Dus is -p de gevraagde oplossing x. Deze verschijnt dus automatisch rechts.
Willen we de inverse van A berekenen, dan vormen we

$$\begin{pmatrix} A & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ (allemaal m-bij-m-matrices)

en passen m stappen pivotal condensation toe.

$$\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ P_2A+1 & -P_2 \end{pmatrix}$$

Dus $P_2A + 1 = 0$ (0 = 0-matrix) d!w.z. rechts verschijnt automatisch de inverse $-P_2$ van A.

Nog algemener: Gegeven behalve de vierkante matrix A van m-bij-m nog de matrices U en V eveneens met m rijen en ρ resp. σ kolommen
We vormen $\begin{pmatrix} A & -U \\ V' & 0 \end{pmatrix}$ (dus met $(m+\sigma)$ rijen en $(m+\rho)$ kolommen)
en passen hierop m keer pivotal condensation toe. We krijgen:

$$\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & -U \\ V' & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ P_2A + V' & -P_2U \end{pmatrix}$$

$P_2A + V' = 0$. of

$P_2 = -V' A^{-1} U$, $-P_2U = V'A^{-1}U$

Rechts verschijnt dus $V'A^{-1}U$

Speciaal interessant is dit als U en V één kolom hebben (kwadratische vorm).

Vraagstukken:

Oplossen[2] van een vergelijking $Ax = c$

met $A = \begin{pmatrix} 13,7 & -11,9 & -6,41 \\ 18,1 & -9,61 & -3,82 \\ 35,0 & 15,7 & 12,1 \end{pmatrix}$ en $c = \begin{pmatrix} -9,07 \\ 1,42 \\ 116,4 \end{pmatrix}$

door pivotal condensation van $\begin{pmatrix} A' & -1 \\ c' & 0 \end{pmatrix}$

Inverse berekenen van A door pivotal condensation van $\begin{pmatrix} A' & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
(hierbij komt eigenlijk de inverse van A' uit de berekening, maar dat is niet essentieel, want $A'^{-1} = (A^{-1})'$

Ook de determinant[1] van A berekenen! Hoe groot zijn dan de determinanten gevormd uit twee kolommen van A en de kolom c?

1) Deze determinant is juist het product van de opeenvolgende pivots!
2) Schat het aantal operaties en de benodigde tijd.

NUMERIEKE EN GRAFISCHE METHODEN.

VI ~~VII~~ VII

Een kolom $x=(x_i)$ wordt ook een vector genoemd; het aantal componenten zijn dimensie. De verzameling vectoren met n componenten noemen we de lineaire n-dimensionale ruimte. Zijn x,y twee n-dimensionale vectoren, dan is x'y een getal, het zgn. inwendig product of inproduct van de vectoren x en y. x'y=y'x. Voor het rekenen hiermee gelden de distributieve wetten:

$$(a^{(1)}x^{(1)} + a^{(2)}x^{(2)})'\ (b^{(1)}y^{(1)} + b^{(2)}y^{(2)}) = a^{(1)}b^{(1)}x^{(1)}y^{(1)} + \cdots$$

$\sqrt{x'x}$ wordt de lengte van de vector x genoemd en door $|x|$ aangeduid. (Heeft men met complexe getallen te maken, dan definieert men het inproduct beter door $\bar{x}'y$). De lengtedefinitie beantwoordt aan de stelling van Pythagoras als we definieren $x'y = |x|\cdot|y| \cdot \cos$. van de hoek (x,y).
De natuurkundige betekenis van het inproduct is: kracht x weg = arbeid.

$0 \leq (\lambda x + y)'(\lambda x + y) = \lambda^2 x'x + 2\lambda x'y + y'y$ dus discriminant ≤ 0: $(x'y)^2 - (x'x)(y'y) \leq 0$

$|x'y| \leq |x||y|$; |Inproduct| $\leq$ |product van de vectorlengten|.
Speciaal $\lambda = 1$: $|(x+y)|^2 = x'x+2x'y+y'y \leq |x|^2+2|x'y|+|y|^2 = (|x| + |y|)^2$ dus $|x+y| \leq |x| + |y|$. (Ongelijkheid van de driehoek).
Algemener kan men van een matrix A een "lengte" of norm A definieren, nl. de wortel uit de kwadraatsom van de coefficienten = de diagonaalsom (spoor) van $A'A$. Dan geldt behalve $|A+B| \leq |A|+|B|$ nog: $|AB| \leq |A|\cdot|B|$ want het algemene element van AB is $c_{ik} = \sum_j a_{ij} b_{jk}$

$$\text{dus } c_{ik}^2 \leq \sum_j a_{ij}^2 b_{jk}^2$$

$$\text{dus } |C|^2 = \sum_{ik} c_{ik}^2 \leq \sum_{ij} a_{ij}^2 \sum_{jk} b_{jk}^2 = |A|^2 |B|^2$$

Speciaal geldt $|Ax| \leq |A||x|$.
Deze definitie van $|A|$ is niet altijd doelmatig. Vaak is het beter de bovengrens van $\frac{|Ax|}{|x|}$ als "lengte" of norm van A te beschouwen. Uit het voorafgaande vol , dat die $\leq |A|$ is. Ook hier gelden de ongelijkheden tussen sommen, producten, enz.
Is b.v. A de eenheidsmatrix, dan wordt $|A| = \sqrt{\text{dimensie}}$, terwijl de bovengrens van $|Ax|/|x|$ uiteraard 1 is.
Van kwadratische matrices kan men machtreeksen vormen: $1 + A + A^2 \ldots$ Is hierbij $\sum \alpha_\nu |A|^\nu$ convergent, dan convergeren de afzonderlijke reeksen van de matrixtermen en de som heeft een zin. Maar ook met de tweede soort vectorlengte i.p.v. A in de convergentie-eis geldt dit.

$(1-B)^{-1} = 1+B+B^2+\ldots$ als dit convergeert.
Dit geeft een eenvoudige methode om de inverse te berekenen van een matrix, die vlak bij de 1-matrix ligt; dus ook een middel om de vergelijking $(1-B)x=o$ op te lossen. Algemener: Is de matrix A voorgesteld als $A=M=N$, waarbij de inverse van M bekend is, dan stelt men $M^{-1}N=B$, dus $A=M(1-B)$, $A^{-1}=(1-B)^{-1}M^{-1}$. Is N voldoende klein, dan geldt dit ook voor B en men kan van de reeksontwikkeling gebruik maken. Hiervan kan men zich bedienen, als men van de gezochte inverse van A een enigszins goede approximatie M_o bezit. M_oA zal dan weinig van de 1 verschillen: $M_oA = 1-B$, $A^{-1}M_o^{-1} = 1+B+B^2+\ldots$
$A^{-1} = (1+B+B^2+\ldots)M_o$. Uiteraard zal men van de machtreeks weinig termen, misschien maar 1+B nodig hebben. Men kan echter ook expres na B afbreken en verkrijgt uit de approximatie M_o van de inverse de

1) immers $M_1=(1+B)M_0$. Dus $M_{n+1}=(1+B)\dots(1+B^{2^{n-1}})M_0=\dots$ (VI,2)
$=(1+B+B^2+\dots+B^{2^n-1})M_0 \rightarrow$ is dit resultaat met enige approximatie

nieuwe approximatie $M_1=(1+B)M_0=(1+1-M_0A)M_0=(2-M_0A)M_0$.
De volgende approximatie zal luiden:

$M_2=(2-M_1A)M_1$, algemeen

$M_{n+1}=(2-M_nA)M_n$.

Expliciet: $M_n=(1-D^{2^n})A^{-1}$ met $D=1-M_0A$,

want $M_{n+1}=(2-M_nA)M_n=(1+D^{2^n})(1-D^{2^n})A^{-1}=(1-D^{2^{n+1}})A^{-1}$.

Dit convergeert naar A als $D^{2^n}\rightarrow 0$, dus als M_0 een "goede" approximatie voor A was. De approximatieformule $M_{n+1}=M_n(2-AM_n)$ is van de voorafgaande natuurlijk niet essentieel verschillend. We hebben hierbij M verbeterd door de correctie $M_n(1-AM_n)$. Eenvoudiger werkt men soms met de correctie $1-AM_n$, dus $M_{n+1}=M_n+(1-AM_n)$. Dan heeft men $M_{n+2}=M_{n+1}+(1-AM_n)$ dus $M_{n+2}=M_{n+1}-(1-A)(M_{n+1}-M_n)$
en dat convergeert als een meetkundige reeks, zodra A vlak bij 1 ligt. (bij de vorige formule behoefde maar AM_0 vlak bij 1 te liggen).
Voor het oplossen van lineaire vergelijkingen behoeft men niet noodzakelijk de inverse te kennen. Het laatste procédé kan dan in gewijzigde vorm worden toegepast:
$Ax=o$ is op te lossen. Men berekent voor een approximatie x_n de "fout" $d_n=Ax_n-$ en gebruikt hem als correctie, dus
$x_{n+1}=x_n-d_n$.

Dan wordt $d_{n+1}=Ax_{n+1}-=Ax_n-Ad_n-=(1-A)d_n$.[2] Dus convergentie onder dezelfde voorwaarde als vroeger. Is $1-A$ niet klein genoeg dan kan men trachten de vergelijking $Ax=$ te vervangen door een verg. $PAx=P'$ met een PA die vlak bij 1 ligt.

Al deze methoden hebben dit voor dat zij met iteratie werken in tegenstelling met die van de vorige les. Iteratie betekent, dat men de op te lossen vergelijking voor de onbekende grootheid f (dit kan een vector of een functie zijn) schrijft in de vorm $\varphi(f)=f$, en dat men beginnende met een o-de approximatie door successievelijke substitutie $f_{n+1}=\varphi(f_n)$ berekent. Convergeert dit procédé, dan zal het (onder zekere bijkomstige voorwaarden voor φ) als de limiet van de f_n een oplossing van $\varphi(f)=f$ opleveren. We kennen het itereren al van het berekenen van vierkants- en andere machtswortels. Bij het oplossen van lineaire vergelijkingen hebben we het aanvankelijk niet toegepast. Ook $(1-B)^{-1}=1+B+B^2+B^3+B^4+B^5\dots$ was nog geen iteratie; wel het volgende hierop. Toch zal men, waar men oplossing rechtstreeks berekent, steeds de proef op de som nemen. Valt dit onbevredigend uit dan moet men als men niet met iteratie werkt, opnieuw beginnen. Bij iteratiemethoden is echter de proef op de som een essentieel onderdeel van de berekening. Met de verkregen benadering f_n gaat men in $\varphi(f)$, om haar te verbeteren. Men heeft hierdoor een voortdurende controle op de bereikte vooruitgang. Men behoeft niet te zeer op nauwkeurigheid te letten. Rekenfouten kunnen over het algemeen de gang wel vertragen, maar bederven de zaak niet van grondaf.

Natuurlijk moet men weten dat het iteratie-procédé convergeert en zelfs vlug convergeert. Bij de laatste iteratie-methode ontbrak hier nog iets aan: men moest weten, dat A vlak bij 1 ligt of men moest de iteratie beginnen met een enigszins goede approximatie. Dat zal bij practische problemen, waar men het een of andere vermoeden van de oplossing heeft geen onoverkomelijk bezwaar zijn. Toch is het prettig ook een iteratie-methode voor het oplossen van lineaire vergelijkingen de berekening van inversen te hebben, die onder alle omstandigheden convergeert.

We beginnen met deze duidelijk te maken voor het geval

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y &= 1 \\ a_2x+b_2y &= 2 \end{aligned} \qquad (1)$$

2) Men mag d_{n+1} niet met $d_{n+1}=(1-A)d_n$ berekenen. Een fout in d_n wordt dan door in alle d_m, @ wordt slechts éénmaal gebruikt (geen iteratie).

We nemen een "proefoplossing" (x_o, y_o). Als maatstaf voor een goede approximatie kunnen we nemen

$$F(x,y) = (a_1x+b_1y - c_1)^2 + (a_2x+b_2y-c_2)^2 \qquad (2)$$

waarin dus (x_o,y_o) gesubstitueerd moet worden. Nu stelt $z = F(x,y)$ een elliptische paraboloide voor met als laagste punt (top) de oplossing van $F(x,y) = o$. Dus een oplossing van (1). De "isohypsen" $F(x\ y) =$ constant zijn concentrische coaxiale ellipsen. Om de oplossing van (1) te vinden moet men trachten langs $z=F(x\ y)$ af te dalen; het vlugst geschiedt dit langs de vallijnen, de lijnen dus die in elk punt het steilste verval vertonen (steepest descent)! Hun projectie op het x-y vlak zijn de orthogonale trajectorieen van de isohypsen; dit zijn echter kromme lijnen, die men practisch niet berekenen kan zonder de oplossing van (1) reeds te kennen. Wel kan men in elk punt gemakkelijk de richting met steilste verval berekenen. (Het nu volgende geldt voor elke vorm van de functie F)

$$F(x_o+dx\ y_o+dy) = F(x_oy_o) + \frac{\partial F}{\partial x}(x_o\ y_o)dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x_oy_o)dy$$

De eerste graads term wordt het kleinst bij gelijke dx^2+dy^2.

wanneer $dx : dy = \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y}$

De vector $\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_oy_o)\ ,\frac{\partial F}{\partial y}(x_o,y_o)\right)$ wordt ook de gradient van F (grad F) genoemd. Het verval is dus het grootst in de richting van de gradient. Ook de steilheid van F is hieruit te berekenen; dit is de lengte van grad F.
In ons geval is grad F $(2a_1d_1+2a_2d_2,\ 2b_1d_1+2b_2d_2)$ als we (2) schrijven als $F = d_1^2 + d_2^2$.
De methode die we nu toepassen, is zich vanuit (x_o,y_o) in het xy-vlak rechtlijnig in de richting van het steilste verval te bewegen; op het oppervlak bekeken, beschrijft men dan een vlakke kromme. Hierbij zal men over het algemeen niet in het minimum terecht komen: gaat men te ver dan moet men zelfs weer opklimmen. De kwestie is dus: hoever? Een methode zou zijn, dat men kijkt waar de raaklijn van het steilste verval $z = o$ snijdt; daar is men dan zeker veilig. Hiermee zou men bij willekeurige gedaante van $F(x,y)$ zeker genoegen moeten nemen; het beantwoordt aan de methode van Newton voor het oplossen van vergelijkingen in één veranderlijke, die wij later zullen leren kennen.
Men kan dit punt (x_1y_1) berekenen uit:

$$|\text{grad } F\ (x_oy_o)| = \frac{-F(x_oy_o)}{\sqrt{(x_1-x_o)^2+(y_1-y_o)^2}} \qquad \text{waarbij } (x_1-x_o,\ y_1-y_o)$$

evenredig met grad $F(x_o y_o)$ is.
Maar in ons geval, waar $F(xy)$ van de tweede graad is, kunnen wij efficienter te werk gaan: De weg, die wij op het oppervlak inslaan, is immers een parabool, en het ligt voor de hand hiervan het laagste punt te berekenen en daar te stoppen. We zullen dan de oplossing al behoorlijk benaderd hebben, ook al hebben we over de nulde approximatie (x_o,y_o) niets verondersteld.
Natuurlijk zijn we alleen in het begin de gradient gevolgd. De rechte weg gaat de isohypsen hoe langer hoe vlakker snijden en bij het eindpunt raakt hij de plaatselijke isohyps. Dat is dan een approximatie (x_1,y_1). Hier berekenen we weer de richting van het steilst verval - deze is eenvoudig loodrecht op de vorige - en zetten het proces zo ver voort als nodig is.
Als volgt wordt de nadere uitwerking (meteen voor p veranderlijken):

Gevraagd de oplossing van $Ax_o=c$ (A een matrix van p-bij-p, c een kolom van p getallen). We beginnen met een approximatie x_o en stellen

$$Ax_o - c = d_o .$$

Aan de functie F beantwoordt hier het lengtekwadraat $d_o' d_o$ van d_o; grad F heeft de richting $A'd_o$. We stellen dus:

$$x_1 = x_o - \sigma_o A' d_o$$

waarbij het getal σ_o nog nader bepaald moet worden. De nieuwe fout wordt nu:

$$Ax_1 - c = d_1$$

We willen $d_1'd_1$ zo klein mogelijk maken

$$d_1 - d_o = A(x_1 - x_o) = -\sigma_o AA'd_o = -\sigma_o S d_o$$

waar $S=AA'$ een symmetrische matrix is

dus
$$d_1 = (1-\sigma_o S)d_o$$
$$d_1'd_1 = d_o'(1-\sigma_o S)(1-\sigma_o S)d_o$$
$$|d_1|^2 = d_o'd_o - 2\sigma_o d_o' S d_o + \sigma_o^2 d_o' S^2 d_o$$

Dit is een kwadratische veelterm in σ_o met als coefficienten bekende getallen, n.l.

$$d_o'd_o = |d_o|^2 \; ; \; d_o' S d_o = d_o' AA' d_o = |A'd_o|^2 \; ; \; d_o' S^2 d_o = |Sd_o|^2$$

Het minimum wordt bereikt bij $\sigma_o = \dfrac{|A'd_o|}{|Sd_o|^2}$

Zijn waarde is $$d_1^{\,2} = \frac{|Sd_o|^2 . |d_o|^2 - |A'd_o|^4}{|Sd_o|^2}$$

Wenst men de vooruitgang te bepalen, dan berekent men

$$\frac{|d_1|^2}{|d_o|^2} = 1 - \left(\frac{|A'd_o|^2}{|Sd_o|\,|d_o|} \right)^2 = 1 - \left(\frac{d_o' Sd_o}{|Sd_o|\,|d_o|} \right)^2$$

$\dfrac{d_o' Sd_o}{|Sd_o|\,|d_o|}$ is de cos van de hoek tussen de vectoren d_o en Sd_o

dus $\dfrac{|d_1|}{|d_o|} =$ sin hoek (d_o, Sd_o)

Deze hoek kan niet 90 worden, want dan zou $A'd_o = o$ worden, terwijl wij hier veronderstellen, dat det $A' \neq o$ is.

$\left|\dfrac{d_1}{d_o}\right|$ ligt dus beneden een getal ϑ dat <1 is en dat wij later nauwkeuriger zullen bepalen (zie syllabus X p. 1).

$$\left|\frac{d_1}{d_o}\right| \leqq \vartheta < 1$$

Algemeen, wanneer men dit procédé voortzet:

$$Ax_n - c = d_n$$
$$x_{n+1} = x_n - \sigma_n A' d_n$$
$$\sigma_n = \frac{|A'd_n|^2}{|Sd_n|^2} = \frac{d_n' Sd_n}{d_n' S^2 d_n} \; ; \left|\frac{d_{n+1}}{d_n}\right| \leqq \vartheta < 1.$$

De d_n dalen dus naar o, minstens als de termen van een meetkundige reeks en overeenkomstig naderen de x_m tot de oplossing van

$$Ax - c = o$$

Hetzelfde proces kan men bij de berekening van de inverse van A toepassen. Het gaat dan om de oplossing van $AX - 1 = 0$ waar X en 1 nu n-bij-n-matrices voorstellen.

$$AX_n - 1 = D_n$$

$$X_{n+1} = X_n - \sigma_n A'D_n$$

$$\sigma_n = \frac{|A'D_n|^2}{|SD_n|^2} \qquad \frac{|D_{n+1}|}{|D_n|} \leq \vartheta < 1.$$

Opgave. Op te lossen het systeem $Ax = c$ met

$$A = \begin{pmatrix} 1,3677 & 0,01529 & 0,17536 \\ -0,2214 & 1,0086 & -0,1981 \\ -0,2374 & -0,47175 & 1,0456 \end{pmatrix} \text{en} \quad C = \begin{pmatrix} 0,6300 \\ 3,6000 \\ 7,8000 \end{pmatrix}$$

A ligt dicht bij 1. Gegeven is voor A^{-1} de benadering

$$\begin{pmatrix} 0,69 & -0,05 & -0,14 \\ 0,20 & 1,08 & 0,18 \\ 0,23 & 0,45 & 1,01 \end{pmatrix}$$

Pas de methoden van de laatste les op dit systeem lineaire vergelijkingen toe en ga na, welke methode het meest geschikt is (eventueel vergelijking met "pivotal condensation").

NUMERIEKE EN GRAFISCHE METHODEN VII.

Een electrisch toestel voor het oplossen van een stelsel lineaire vergelijkingen.

Zie hiervoor C.E. Berry e.a., Journal of applied physics 17 ('46) p.262-272.

Sinds tientallen jaren worden al pogingen gedaan om toestellen te construeren voor de mechanische of electrische oplossing van stelsels lineaire vergelijkingen. De grondslag van de electrische methoden ligt in de vertakkingswetten van Kirchhoff:

1. In elk der vertakkingspunten is de som ΣI der stromen nul.

2. In elk gesloten stel takken gelat $E = \Sigma Iw$ (E=electromotorische kracht; I = stroom; w = weerstand in afzonderlijke tak).

Voorbeeld: de Wheatstonese brug. (fig.1)

1ewet $I = I_1 + I_2 = I_2 + I_4$

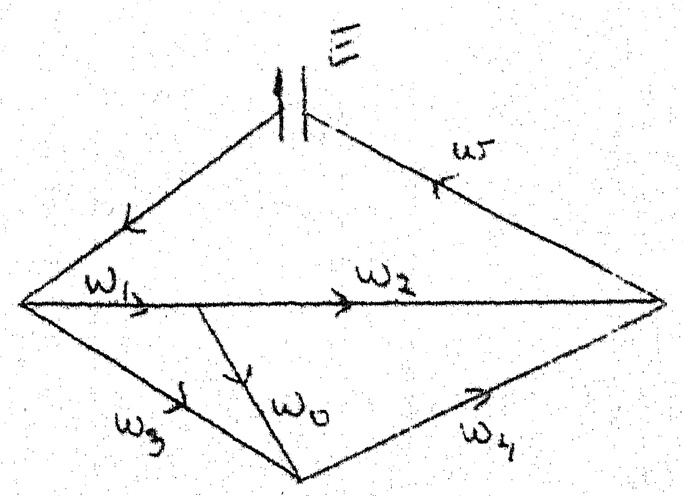
$I_1 = I_o + I_2$; $I_3 + I_o = I_4$

2e wet $E = Iw + I_1w_1 + I_2w_2 = Iw + I_3w_3 + I_4w_4$

$O = I_1w_1 + I_ow_o - I_3w_3 = I_2w_2 - I_4w_4 - I_ow_o$

Voorwaarde, dat de brug stroomloos is:

$$w_1 : w_3 = w_2 : w_4$$



Blijkbaar kan men door min of meer ingewikkelde schakelingen elk lineair vergelijkingstelsel met $I_1, I_2 \ldots$ als onbekenden realiseren. De weerstanden spelen de rol van coefficienten. Bij wisselspanning moet met zelfinductie en capaciteit rekening worden gehouden; i.p.v. de weerstand komt dan de impedantie. Het oplossen geschiedt door de electrische stroom zelf.

Er is enorm veel literatuur over dit onderwerp. De schakelingen zijn meestal zeer ingewikkeld, omdat de auteurs aan instantane oplossing hebben gedacht. Bovendien schijnen de pogingen te hebben gefaald, omdat de technische problemen niet behoorlijk werden opgelost; de weerstanden werden door warmteontwikkeling beinvloed. In de laatste jaren zijn sommige constructies beter geslaagd. Een der toestellen zal ik nu beschrijven.

Voor het in elkaar zetten van lineaire vergelijkingen heeft men de operaties van optellen en vermenigvuldigen nodig. De op te tellen objecten zijn spanningsbronnen $E_1 \ldots E_n$. Door parallelinschakeling met precies gelijke impedanties (fig.2) geven ze op de factor 1/n na de som E. De vermenigvuldiging geschiedt door Wheatstonese bruggen (potentiometer). Het eerste takt van de spanning E het onderdeel aE af, het tweede hiervan weer abE, zodat ab uit a en b a.h.w. door vermenigvuldiging verkregen is. Neemt men weer voor a een coefficient, voor b een onbekende en schakelt men dergelijke constructies parallel, dan wordt een lineaire combinatie $\sum a_\nu^{(i)} x_\nu$ gevormd, die op analoge manier met een term c gelijk gesteld wordt. Men stelt dus van tevoren de coefficientpotentiometers in en regelt daarna de x-potentiometers, zo dat $\sum a_\nu^{(1)} x_\nu = c^{(1)}$ bevredigd is. Met de verkregen x gaat men in de tweede vergelijking $\sum a_\nu^{(2)} x_\nu = c^{(2)}$ d.w.z. men schakelt het hele stel x-potentiometers over naar een nieuw stel coefficientenpotentiometers, en corrigeert de x_1 zo dat aan de tweede vergelijking voldaan wordt. Dan gaat men over naar de derde vergelijking, enz. en tenslotte keert men weer naar de eerste terug, enz. Men kiest hierbij een klassiek iteratie-procédé, waarbij men in de hoofddiagonaal voor enigszins grötere coefficienten zorgt en men corrigeert telkens x_i uit de i-de vergelijking. De constructie is zodanig dat men alle coefficienten-potentiometers op een horizontale wals heeft aangebracht, en wel dezelfde vergelijking op één horizontale rij (en wel bijbehorende "onder elkaar"). Bij het draaien komt een rij te voorschijn achter een venster; hierbij worden de x-potentiometers automatisch ingeschakeld. Dan wordt één x gecorrigeerd, totdat een zekere buispotentiometer 0 aanwijst. Daarna wordt verder gedraaid, enz. Met negatieve coefficienten wordt rekening gehouden door phaseverschuiving of door een andere schakeling. De instelling geschiedt door draaibare knoppen.

Het toestel is voor 12 vergelijkingen met 12 onbekenden gebouwd. Lengte 32 inches; breedte en hoogte half zo hoog(geschat). Het instellen van een coefficient duurt 1/2 minuut. Het gehele instellen en oplossen samen gemiddeld over 10 stelsels met dezelfde linkerkanten 10-20 minuten, tenminste bij de door de auteur behandelde vraagstukken (analyse van koolwaterstoffen volgens spectrophotometer gegevens). Met gewone rekenmethoden 80 minuten. Het instellen kan op 4 decimalen nauwkeurig geschieden, De uitkomsten vergeleken bij gewone methoden geven afwijkingen minder dan 1%, gemiddeld 2%

Critiek: 1. Zullen de impedanties op den duur constant blijven?
2. De iteratiemethode waarmee gewerkt is faalt over het algemeen. Alleen zeer gunstige gevallen heerst convergentie. De auteurs zeggen niet met welke approximatieve oplossing zij zijn begonnen, en hoe zij daaraan zijn gekomen. Dat geeft te denken.

Toch is het binnenbrengen van iteratiemethoden een vooruitgang. Men zou een toestel moeten construeren, dat een steeds convergente iteratiemethode verwerkelijkt en wel liefst zo dat menselijk ingrijpen onnodig is. B.v. een minimummethode waarbij het toestel zelf zijn minimum opzoekt.

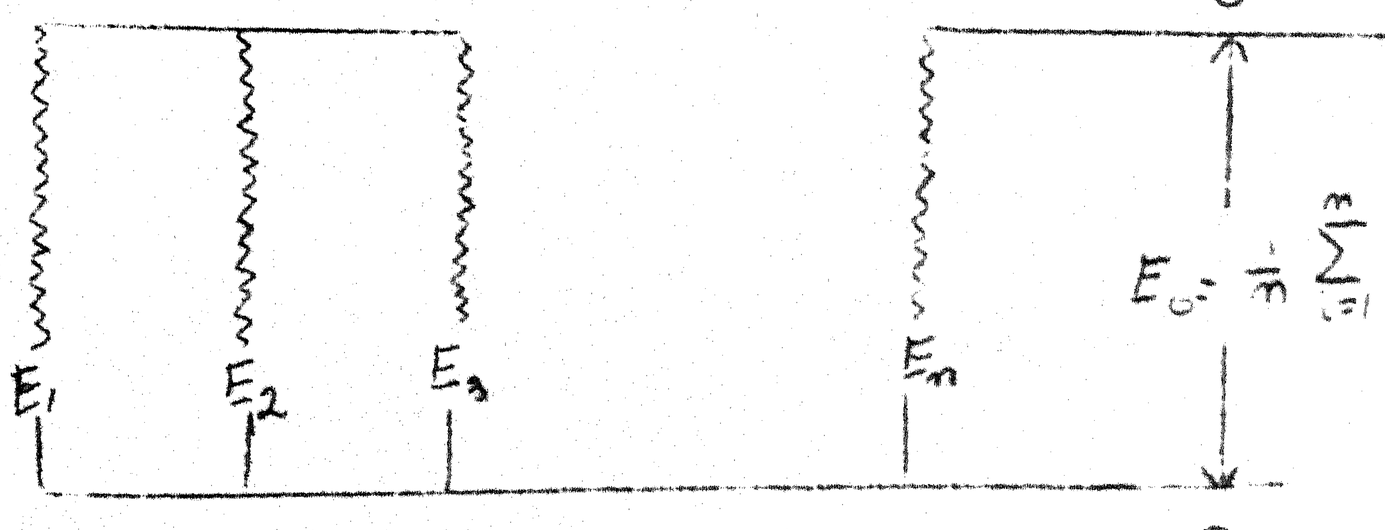


fig.2 Diagram van een kring ter verkrijging van een spanning evenredig met de som van een aantal spanningen.

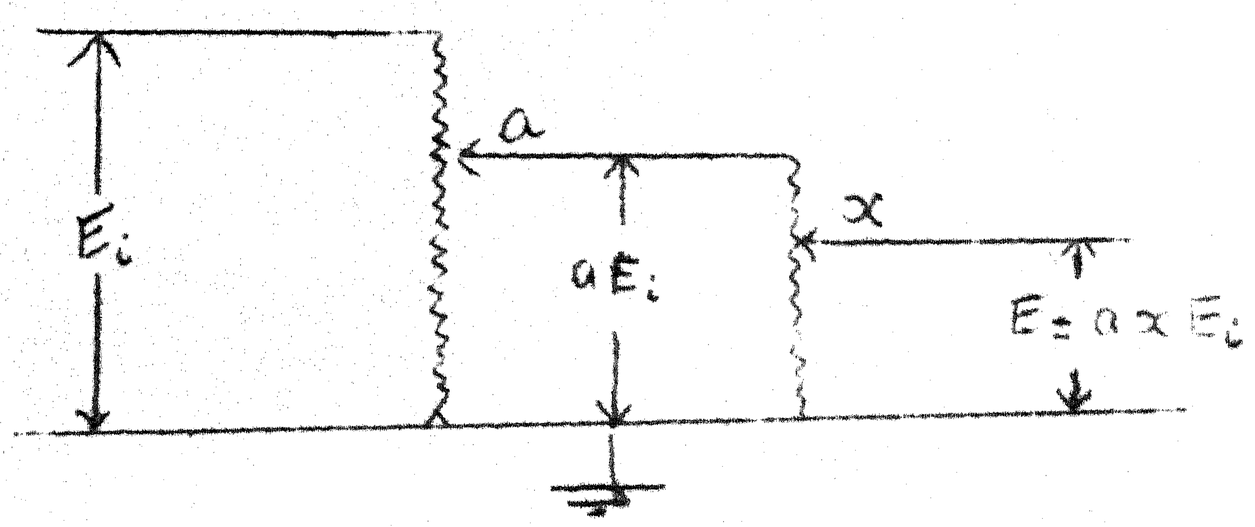


fig.3 Diagram van een kring, die een spanning levert evenredig met het product van 2 getallen.

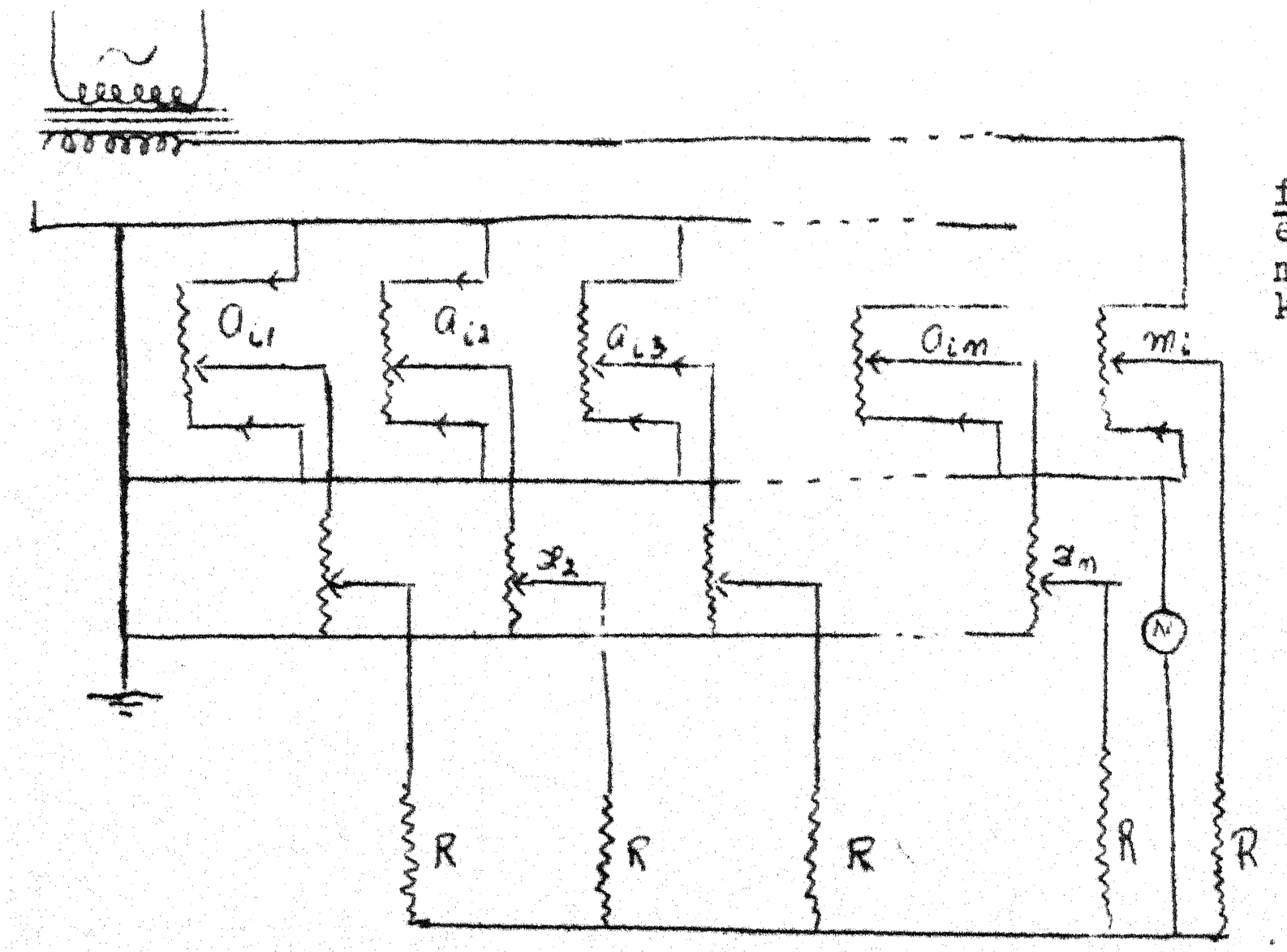


fig.4 Diagram van een kring analoog met een vergelijking van het type

$\sum a_{ij} x_j = m_i$

CURSUS NUMERIEKE EN GRAFISCHE METODEN

VIII Blad 1

Aanvullingen.

Bij syllabus VI :De methode van steepest descent convergeert steeds, maar onder ongunstige omstandigheden slecht. Hebben in het voorbeeld van twee onbekenden de isohypsen een grote excentriciteit en bevindt men zich met een approximatie in de buurt van de lange as, dan staat de richting van stelsel vrijwel bijna loodrecht op de voerstraal; men schiet dus veelal op en evenzo in het vervolg. Deze omstandigheid is zeer ernstig. Al begint men zelfs met een niet zo onhandige approximatie, dan kost men toch na de methode eenmaal te hebben toegepast te hebben, in de gevaarlijke hoek terecht.

Een variatie op de gegeven methode is de volgende: men brengt de vergelijkingen eerst op de normaalgedaante van Hesse; d.w.z. men deelt elke vergelijking door de wortel uit de kwadratensom van zijn coëfficienten.De kwadratensom van de coëfficienten van de nieuwe vergelijking is 1.Dit nieuwe stelsel schrijven we in de vorm:

$$(E_1) \quad Q_i X - Y_i = 0$$

waar Q_i de vector van de i-de rij voorstelt. Dat het stelsel E_1 de normaalvorm van Hesse heeft,betekent ,dat alle vector Q_i de lengte 1 heeft.Substitueert men voor X zekere X_0 ,dan is $Q_i X_0 - Y_i$ de afstand van X_0 tot het hypervlak E_i (mog van een teken voorzien). De loodlijn van X_0 op E_1 heeft de richting Q_i en de lengte:

$$Q_i X_0 - Y_i = \delta_i$$

(we hatten δ_i op als de i-de component van een vector δ)Het voetpunt van deze loodlijn is:

$$X_0 - \delta_i Q_i$$

We vormen nu het zwaartepunt van al deze voetputen.Dit is zeker een betere benadering.Hiervoor vinden we:

$$\frac{1}{m} \sum (X_0 - \delta_i Q_i) = X_0 - \frac{1}{m} \Delta_i$$

Dit is hetzelfde als vroeger behalve ,dat de variabele r door de vaste 1/m vervangen is.Zulks heeft zekere voordelen b.v. bij het gebruik van Hollerith-multipliers. Op de diepere betekenis komen we terug.

Bij syllabus VII: De hier toegepaste iteratie-methode is die van Seidel Veronderstelt wordt ,dat in de matrix der coëfficienten de diagonaalelementen overwegen.Preciezer; in elke rij is de absolute waarde van het diagonaalelement groter dan de som der absolute waarden der overige termen.Men kiest bij de allereerste stap $x_2 \ldots x_n$ vrij ,berekent na substitutie van deze waarden in de eerste vergelijking x_1.In de tweede vergelijking wordt daarna x_2 zo bijgeregeld, dat de verg. voldaan wordt enz. Van de n-de vergelijking keert men weer tot de eerste terug.

EIGENWAARDEN

Onder een eigenwaarde van een vector x voor een kwadratische matrix A verstaat men een oplossing λ van het stelsel $Ax = \lambda x$ $(x \neq 0)$ Een zulk x de eigenvector.Elk veelvoud van x is dan eveneensaan eigenvector. De verzameling van alle eigenwaarden wordt het spectrum genoemd. Het stelsel kan ook geschreven worden als $(A - \lambda)x = 0$ waarbij λ hier is op te vatten als het λ -voud van de eenheidsmatrix. Voor het bestaan van een oplossing $x \neq 0$ is noodzakelijk en voldoende ,dat $\det(A - \lambda) = 0$. Dit is een n-de-graads vergelijking met n oplossingen waaronder ook gelijke kunnen voorkomen.Zijn er n verschillende oplossingen $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ met eigenvectoren $x_1 \ldots x_n$ dan bestaat er tussen deze vectoren een lineaire relatie; men kan elke vector x voorstellen als een lineaire combinatie $\sum f_i x_i$ Voeren we nu deze $f_1 \ldots f_n$ als nieuwe coördinaten van de vector x in, dan wordt A door een diagonaalmatrix voorgesteld.

De vergelijking $\det(A - \lambda) = 0$ heet ook de karakteristieke vergelijking van de matrix A. Nemen we deze vergelijking $\varphi(\lambda)$. Zijn coefficienten worden door sekere onderdeterminanten uitgedrukt. De negatieve coefficient van λ^{n-1} is gelijk aan de som der eigenwaarden. Deze som is dus ook gelijk aan de som van de diagonaaltermen van A, het z.g. spoor van A. De bekende term van $\varphi(\lambda)$ = det. A. Belangrijk is ook $\varphi(A) = 0$.

Symmetrische matrices hebben alleen reele eigenwaarden. Bij een symmetrische matrix S hoort een kwadratische vorm $x' S x$. Is deze steeds > 0 voor $x \neq 0$, dan heet zij positief definiet. De eigenwaarden zijn dan allemaal positief. Voorbeeld: $C' C$ is steeds symmetrisch en, als $\det C \neq 0$ is, ook positief definiet, want $x' C' C x = |Cx|^2 > 0$.
A wordt orthogonaal genoemd indien $A' = A^{-1}$ of $A' A = 1$. Orthogonale transformaties A behouden het inproduct (dus ook hoek en lengte), want $(Ax)'(Ay) = x'A'Ay = x'y$. Een kwadratische vorm $x'Sx$ ondergaat bij de transformatie $x \to Ax$ de transformatie $(Ax)' S(Ax) = x'(A'SA)x$; de nieuwe matrix $A'SA$ is weer symmetrisch.
De eigenvectoren van symmetrische S, bij verschillende eigenwaarden behorende, zijn orthogonaal op elkaar (inproduct = 0), die van gelijke eigenwaarden kunnen orthogonaal op elkaar worden gekozen. Hierdoor is het mogelijk een symmetrische matrix door orthogonale transformatie op de diagonaalvorm te transformeren.
Practische methode voor het berekenen van eigenwaarden ens:
Is $Ax = \lambda x$ voor sekere $x \neq 0$, dan is $A^k x = \lambda^k x$. Dus de eigenwaarden van A^k zijn de k-de machten van die van A.
Spoor $(A^k) = \sum \lambda_i^k$ (λ_i = eigenwaarden). Voor grote i wordt deze term practisch = λ_1^k als λ_1 reeel is en de overige eigenwaarden absoluut overtreft. Om de grootste eigenwaarde althans absoluut te berekenen zal men dus A in machten verheffen en wel, het eenvoudigste, voortgezet kwadraten, dus A^{2^p} berekenen, hiervan het spoor nemen, en daarna de 2^p-de machtswortel trekken. Dit gaat nog op als de grootste eigenwaarde een multipliciteit $k > 1$ bezit. Alleen is de convergentie slechter omdat er een factor $\sqrt[k]{\lambda_1}$ bijkomt. In elk geval hangt de convergentie af van de verhouding tussen de grootste en de volgende eigenwaarde; ligt die in de buurt van 1, dan is de convergentie slecht.
Is de grootste eigenwaarde complex, dan faalt deze methode, want dan heeft men naast elkaar de eigenwaarden $\lambda_1 e^{i\varphi}$ en $\lambda_1 e^{-i\varphi}$ die de bijdrage leveren $\lambda_1^{2^p} e^{2^p i\varphi} + \lambda_1^{2^p} e^{-2^p i\varphi}$, die heen en weer schommelt. De volgende eigenwaarde kan men met deze methode bepalen, door van het spoor van A^{2^p} de bijdrage $\lambda_1^{2^p}$, die men thans kent, af te trekken en de rest analoog te behandelen enz. Voor de bepaling der eigenvectoren x is een

[illegible] de bijbehorende eigenvectoren. Als
voorts [illegible] de reeks lineair onafhankelijke eigenvectoren, die
ook hier niet de bedoeling zou de grootste eigenwaarde het van de overige
als de niet per ongeluk zo nauwkeurig, dat [illegible] is, dan heeft
een lange keten [illegible] het karakteristieke in de ene de vector
x_{j+1} meer dan precies evenredig met de eerstvolgende x_j, terwijl
de evenredigheidsfactor is. Door b.v. $A^j x_0$ met x^{j+1} te met elkaar te
vergelijken, d.w.z. de een of de eigenwaarde zijn, vindt
men λ_1, en hun verhouding is λ_2. Deze methode faalt als λ_1
meervoudig of complex is. Hiervoor zijn andere benaderingen nodig.
Voor de berekening der volgende eigenwaarden en eigenvectoren worden
verschillende methoden aangegeven, die allemaal op het volgende begin-
sel berusten. Zijn de eigenwaarden volgens de absolute grootte ge-
rangschikt, $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$, dan is λ_1 = eigenwaarde
met de grootste absolute waarde, λ_2 = eigenwaarde met de op een na
grootste absolute waarde, enz. (De eigenwaarden dienen van langere
orde aan) hiervan kan men bij verschillende methoden gebruik maken.
Een manier is nu, dat men een willekeurige vector x_0 ontwikkelt naar
de eigenvectoren, d.w.z. men gaat na, of de eigenvectoren zijn, want
dan $x_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, en het verband tussen x_0 en x_1 is dan
$x_1 = Ax_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i x_i$. Deze methode faalt als λ_1
meervoudig of complex is. Hiervoor zijn andere benaderingen nodig.
Voor de berekening der volgende eigenwaarden en eigenvectoren worden
verschillende methoden aangegeven, die allemaal op het volgende begin-
sel berusten. Zijn de eigenwaarden volgens de absolute grootte ge-
rangschikt, $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$, dan is λ_1 = eigenwaarde
met de grootste absolute waarde, λ_2 = eigenwaarde met de op een na
grootste absolute waarde, enz. (De eigenwaarden dienen van langere
orde aan)

van de absoluut grootste. Men passe dus op A $-\gamma$ I de reeds methode toe als bij de berekening van λ_1 en $x^{(1)}$. Indien men dan een nieuwe eigenwaarde en eigenvector, n.l. die het meest van λ_1 verwijderd is. Tevens kent men met deze methode niet. Maar nu kan men het spectrum als het ware dubbel vouw n door kwadratische transformatien toe te passen. Men vormt $(A - \gamma I)^2 + \gamma^2 I$. Heeft men b.v. γ = gemiddelde tussen grootste en kleinste eigenwaarde en $\lambda_2 - \gamma < \lambda_1 - \gamma$ dan wordt zeker een nieuwe eigenwaarde in de absoluut grootste en men kan de oude methode opnieuw toepassen. Deze methode kan men volgens de behoefte, sterk verfijnen en vooral kan men in de praktijk nuttig gebruik maken van het een of ander, dat misschien uit de probleemstelling over de eigenwaarden reeds bekend is. Kent het er b.v. op aan, behalve de grootste alleen nog de hierop volgende eigenwaarde te bepalen, dan zal men $(\lambda - \gamma I)^2$ gebruiken met een γ die ergens in de buurt van de te verwachten tweede eigenwaarde ligt en een voldoend grote γ^2.

Opmerking: Uiteraard kan men bij de berekening van de machten van $A - \gamma I$ enz. nuttig gebruik maken van de reeds bekende machten van A. Is van de een niet te ruwe approximatie λ^* van een eigenwaarde λ bekend dan kent men $(A - \lambda^* I)^{-1}$. Dit heeft de eigenwaarde $(\lambda - \lambda^*)^{-1}$, die betrekkelijk groot zal zijn (vergeleken met de andere), zodat de oude methode goed convergeert. De nieuwe approximatie van λ kan men analoog behandelen. Men ontwikkelt dus a.h.w. λ in een kettingbreuk

Opgave: Bereken van de volgende matrix de drie eigenwaarden met de bijbehorende eigenvectoren. Nemmer de eigenvectoren zo, dat de derde component +1 is

$$\begin{vmatrix} +95,9351 & -10,0882 & -18,1434 \\ -17,4810 & -9,0486 & +1,4259 \\ -16,0017 & +6,1965 & +2,7504 \end{vmatrix}$$

Complexe eigenwaarden.

We hebben al opgemerkt dat complexe eigenwaarden niet met de aangegeven methoden kunnen worden verkregen. Als λ complex is en $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, dan is ook $A\bar{\vec{x}} = \bar{\lambda}\bar{\vec{x}}$ als A reëel is. De streep boven de letter duidt de toegevoegd complexe waarde aan. We passen nu weer de methode van de sporen toe. Als $|\lambda_1| = |\lambda_2|$ de andere eigenwaarden absoluut genomen overtreft, dan is U_p = spoor $(A^p) = \lambda_1^p + \lambda_2^p$ + (termen van lagere orde). Dus als $\lambda_{1,2} = re^{\pm i\varphi}$ dan is $U_p = 2r^p \cos p\varphi$ + ... Men vorme nu $U_{p+1} - rU_p = ir^p(2\cos p\varphi \cos\varphi + \cos p\varphi) + \ldots$ en dus wegens $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ is dus

$$U_{p+1} - rU_p = 2r^{p+1}\cos p\varphi \cos\varphi + \text{(termen van lagere orde)}$$

Hieruit berekent men de absolute waarde r van $\lambda_{1,2}$. Het argument zelf kan hieruit niet worden bepaald. Wel $\cos p\varphi$ als p zo hoog is, dat bij goede benadering $U_{p+1} - rU_p = 2r^{p+1}\cos p\varphi \cos\varphi$

Een analoge methode leidt tot eigenwaarden en eigenvectoren. Men begint met een enigszins willekeurige vector u. Zoals elke vector kan deze in de eigenvectoren van A worden uitgedrukt: $u = \sum c_i x_i$. Als bij de absoluut grootste eigenwaarden λ_1 en λ_2 de eigenvectoren x_1 en $\bar{x}_1$ worden gekozen, dan geldt wegens de realiteit van u

$$u = c_1 x_1 + \bar{c}_1 \bar{x}_1 + \sum c_i x_i$$

De overige termen zullen in het vervolg geen rol spelen.

Nu volgt $A^j u = \lambda_1^j c_1 x_1 + \bar{\lambda}_1^j \bar{c}_1 \bar{x}_1 + \ldots$

Dit is dus voor grote j bij benadering een lineaire combinatie van x_1 en $\bar{x}_1$, die bovendien reëel is. Dus stelt zij approximatief het reële deel van de eigenvector $\lambda_1^j c_1 x_1$ voor. De $A^j u$ worden dus voor grote j ongeveer evenredig onder elkaar en aan het reële deel van x_1. De evenredigheidsfactor schommelt echter heen en weer. Deze bepalen we voortdurend.

We stellen weer $\lambda_1 = re^{i\varphi}$ en bepalen r once aandacht tot

ben van de coördinaten van $\eta^{(r)}$, die we $\eta^{(r-1)}$ noemen. Dan wordt bijkbaar de overeenkomstige coördinaat van $A^{r}u$, die we $\xi^{(r)}$ noemen:

$$\xi^{(r)} = \eta^{(r-1)} + \ldots$$

We noemen:

$$\ldots$$

Uit $\xi^{(r)}$ berekent men ε_r. Daarna is hieruit $\eta^{(r)}$ eenduidig bepaald. Verder is het niet lastig om hieruit en uit $\xi^{(r-1)}, \ldots, \xi^{(1)}$ en $\eta^{(r-1)}, \ldots, \eta^{(1)}$ door proberen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ vast te leggen. Met r en ε_r is nu ε_{r-1} bekend. Evenzeer uit $\xi^{(r-1)}$ bepalen we ε_{r-2}, zodat we nu ook de coördinaat $\xi^{(r-2)}$ van $A^{r-2}x$ kennen.

Op dezelfde manier worden de andere coördinaten van de eigenvector $\xi^{(r)}$ bepaald. Andere eigenwaarden en eigenvectoren dan de hoogste vindt men op analoge wijze met het reële geval.

Grote moeilijkheden baart het optreden van meervoudige eigenwaarden. Bij practische problemen zal het weliswaar niet voorkomen, dat twee eigenwaarden precies hetzelfde absolute bedrag hebben, maar reeds eigenwaarden met bij benadering dezelfde absolute waarde bezorgen dezelfde last. Ik wil de hiervoor ontwikkelde generalisaties liever niet uiteenzetten, omdat de convergentie dan toch zeer slecht is. Ik meen, dat het in dit geval de aangewezen weg is, om rechtstreeks de karakteristieke vergelijking te bepalen.

Zonder bewijs geef ik hier aan, dat A zelve aan zijn eigen karakteristieke vergelijking voldoet. Heeft men nu de machten van A tot en met de n-de (n= dimensie van A) reeds bepaald, dan is het gemakkelijk de karakteristieke vergelijking

$$\ldots$$

de coëfficienten c_ν berekenen en dat kan geschieden door bv. de ν-de rij van elke A^{ν} ($\nu = 0, \ldots, n$) op te schrijven en de onbekenden c_ν door pivotal condensation te bepalen. Heeft men de karakteristieke vergelijking dan kan men met de oplossingsmethoden voor algebraische vergelijkingen de eigenwaarden bepalen.

De eigenvectoren worden dan ook weer met pivotal condensation berekend

Opgave: Bereken eigenwaarden en eigenvectoren van

$$A = \begin{Vmatrix} + 18,4850 & - 2,0760 & + 15,0180 \\ + 16,1760 & + 0,0867 & + 12,2444 \\ - 9,3180 & - 0,4306 & - 5,0517 \end{Vmatrix}$$

Normeer de eigenvectoren zo, dat de laatste component + 1 is. De gegeven coefficienten mogen als absoluut nauwkeurig worden beschouwd.

Bepaal verder volgens de zojuist aangegeven methode de karakteristieke vergelijking van

$$\begin{Vmatrix} + 3 & + 1 & - 2 \\ - 3 & - 2 & + 2 \\ + 4 & - 2 & + 2 \end{Vmatrix}$$

CURSUS NUMERIEKE EN GRAFISCHE METHODEN.

X

We nemen kwesties uit syllabus VI (zie ook VII voor aanvulling op VI) weer op. Daar hadden wij te maken met een positief definiete symmetrische matrix S=AA'. Voor het approximatie-procédé moesten wij een grootheid $\sigma = \frac{d_o' S d}{d_o S^2 d}$ berekenen. Denken we ons dus een coordinatenstelsel ingevoerd zodat S diagonaalmatrix $(\lambda_1 \cdots \lambda_n)$ wordt (waarbij alle $\lambda_\nu > 0$ zijn). Als nu d_o de coordinaten $\xi_1 \cdots \xi_n$ heeft, dan wordt

$$\sigma = \frac{\sum \lambda_\nu \xi_\nu^2}{\sum \lambda_\nu^2 \xi_\nu^2} \geq \frac{1}{\lambda_1}$$

indien λ_1 de grootste eigenwaarde van S is. Werken we dus steeds met $1/\lambda_1$ i.p.v. met σ dan gaan we niet ver. Hebben we A van tevoren zo genormeerd, dat elke rij de normaalgedaante van Hesse heeft (zie VIII) dan is de diagonaal van S met énen bezet, dus $\sum \lambda_\nu = n$, dus ook $\lambda_1 \leq n$, $1/\lambda_1 \geq 1/n$. De $\sigma = 1/n$ die wij in de methode van VIII gebruikt hebben, is dus de best mogelijke, die wij zonder gebruik te maken van de speciale structuur van S kunnen verkrijgen voor de methode van VI.

We hebben verder in de VI voor de convergentie van het procédé essentiele verhouding $|d_1|/|d_0|$ berekend als sin hoek(Sd_o, d_o).

Nu was $\cos^2$ hoek $(Sd_o, d_o) = \frac{(d_o' S d_o)^2}{(d_o' d_o)(d_o' S S d_o)}$ en dat is

$$= \frac{(\sum \lambda_\nu \xi_\nu^2)^2}{\sum \xi_\mu^2 \sum \lambda_\nu^2 \xi_\nu^2}.$$

Dus $\sin^2 \left(\text{hoek}(Sd_o, d_o)\right) = \frac{\sum_{\mu,\nu} (\lambda_\nu^2 - \lambda_\mu \lambda_\nu) \xi_\mu^2 \xi_\nu^2}{\sum_{\mu,\nu} \lambda_\nu^2 \xi_\mu^2 \xi_\nu^2} = \frac{\sum (\lambda_\mu^2 - 2\lambda_\mu \lambda_\nu + \lambda_\nu^2) \xi_\mu^2 \xi_\nu^2}{\sum (\lambda_\mu^2 + \lambda_\nu^2) \xi_\mu^2 \xi_\nu^2}$

We schatten deze uitdrukking door het maximum van de teller te berekenen onder de voorwaarde, dat de noemer = 1 is. Voor n=2 geeft dit als een mogelijk maximum van

$\sin \left(\text{hoek}(Sd_o, d_o)\right) \to \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$ als λ_1 de grootste en λ_2 de kleinste eigenwaarde van S is. Het algemene geval kan op n=2 worden teruggevoerd. In elke 2-dim doorsnede van de bij S behorende concentrische n-dimensionale ellipsoide, wordt dit maximum een dergelijke breuk, waarbij λ_1 en λ_2 dan de reciproke waarden van de halve assen zijn. Laat men nu de ellipsen varieren, dan krijgt men als maximum $\vartheta = \frac{\lambda_1 - \lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_n}$ waarbij λ_1 resp. λ_n de grootste resp. de kleinste eigenwaarde is. Daar steeds $\left|\frac{d_{n+1}}{d_n}\right| \leq \vartheta$ wordt de convergentie naar nul van de fouten d_n dus des te beter, naarmate λ_1 en λ_n dichter bij elkaar liggen. Vroeger hebben we al duidelijk gemaakt, dat bij langgerekte ellipsen de convergentie slecht zal zijn.

Het is nu merkwaardig, dat dit geval principieel, dus onafhankelijk van de oplossingsmethode, reeds moeilijkheden geeft. Is i. $Ax=c$ de rechterkant niet nauwkeurig bekend, zodat men eigenlijk

$$A(x + \delta x) = c + \delta c$$

moet oplossen, dan wordt de fout δx bepaald door $A \delta x = \delta c$. Nu kan

δx groot worden, ook al is δc klein, zelfs als det.A behoorlijk van 0 afwijkt. De determinant geeft immers van de afbeelding A de volumefactor aan, wat een zeer summiere maat is, daar ook dan A sommige vectoren sterk kan doen inkrimpen, mits andere vectoren maar voldoende worden uitgerekt om toch het gehele volume constant te laten. Als dit geval zich voordoet, d.w.z. als voor sommige u de verhouding $\frac{|u|}{|Au|}$ groot wordt, dan kan eventueel een kleine verandering van c een grote verandering in de oplossing x van $Ax=c$ veroorzaken; de rechterkant moet dan dus veel nauwkeuriger bekend zijn, dan men x wenst uit te rekenen.

Nu is $\frac{|u|^2}{|Au|^2} = \frac{u'u}{u'A'Au}$

De eigenwaarden van AA zijn dezelfde als die van AA'. Noemen wij ze ze weer $\lambda_1 \dots \lambda_n$ en voeren we een coordinatentransformatie uit, die S op de diagonaalvorm brengt dan wordt ons quotient $\frac{\sum \xi_\nu^2}{\sum \lambda_\nu \xi_\nu}$

Het maximum hiervan is $1/\lambda_n$, als λ_n de kleinste eigenwaarde is.
We vinden dus $|\delta x| \sim \frac{|\delta c|}{\sqrt{\lambda_n}}$

Iets dergelijks geldt als we ook nog rekening houden met de onnauwkeurigheid van A. Dan is
$(A + \delta A)(x + \delta x) = c + \delta c$ of $A(\delta x) = \delta c - (\delta A)x$, met dezelfde consequentie.

Het gedrag van de eigenwaarden speelt bij alle oplossingsmethoden een rol. Nemen we als voorbeeld van de machtreeksontwikkeling van A^{-1}

$$A^{-1} = (1 - B)^{-1} = 1 + B + B + \dots$$

voor een positief definiete symmetrische matrix A, waarvan de eigenwaarden dus positief zijn. Dan wordt $|Bx| \leq \vartheta |x|$, waarbij ϑ de absoluut grootste eigenwaarde van B is en deze grens wordt ook bereikt. We hebben dus convergentie overeenkomstig met de machtreeks $1 + \vartheta + \vartheta^2 + \dots$ en dus moet $|\vartheta| < 1$ zijn. Zijn de eigenwaarden van A volgens de grootte $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ dan worden die van B $1 - \alpha_1$, $1 - \alpha_2, \dots 1 - \alpha_n$. Voor de convergentie is nodig, dat voor elke ν : $|1 - \alpha_\nu| < 1$. Is deze voorwaarde niet vervuld, dan kan men trachten door vermenigvuldiging van A met een getal ρ hieraan nog te voldoen. D.w.z. men bepale ρ zo, dat $|1 - \rho \alpha_\nu| < 1$ is, of precieser: zo dat het grootste onder de getallen $1 - \rho \alpha_\nu$ zo klein mogelijk is, door ρ zo te kiezen, dat $\rho \alpha_1$ en $\rho \alpha_n$ aan weerszijden van 1 liggen en wel zo dat

$$\vartheta = \rho \alpha_1 - 1 = 1 - \rho \alpha_n \quad \text{of} \quad \rho = \frac{2}{\alpha_1 + \alpha_n} \quad \text{dus} \quad \vartheta = \frac{\alpha_1 - \alpha_n}{\alpha_1 + \alpha_n}.$$

Dus over de convergentie voor dit approximatieprocédé beslist hetzelfde getal ϑ als over die van de vroegere methode. Dit verband is wel merkwaardig, doch een directe oorzaak is niet in te zien.

Is A willekeurig (dus niet noodzakelijk positief symmetrisch) weer met de eigenwaarden $\alpha_1 \dots \alpha_n$ dan zijn die van $1 - \rho A$ weer $1 - \rho \alpha_1, \dots, 1 - \rho \alpha_n$ maar nu behoeven de α_i niet positief en zelfs niet reeel te zijn. Men kan dus de $1 - \rho \alpha_\nu$ door over ρ te beschikken niet binnen een afstand 1 van 0 brengen. Aan de andere kant is voor de convergentie van een machtreeks $\sum \gamma_\nu B^\nu$ zeker

noodzakelijk, dat $\sum \gamma_\nu \beta^\nu$ convergeert voor alle eigenwaarden van B ,(pas immers de machtreeks op een eigenvector toe). Men kan dus van een willekeurige A op deze manier niet de reciproke berekenen.

Gaat het erom de vergelijking $Ax = c$ op te lossen dan kan men tot een positieve symmetrische matrix overgaan door $A'Ax=A'c$. Heeft men A van tevoren op de normaalvorm van Hesse gebracht, dan zijn de diagonaaltermen in $S = A'A$ allemaal = 1. Dus het spoor van $S = n$ en zijn grootste eigenwaarde $< n$.
Door deling met $n/2$ kan men er voor zorgen, dat hij < 2 wordt, dus op een afstand < 1 van 1 ligt.

We veronderstellen, dat alle eigenwaarden van S tussen 0 en 2 liggen. Men kan zich nu afvragen of men niet door geschikte processen het spectrum kan contraheren, zodat de matrix steeds meer op de 1-matrix gaat lijken. Hiervoor is aangewezen een functie $f(\zeta)$ toegepast op S, die voor $\zeta = 0$ en $\zeta = 2$ verdwijnt terwijl tussen deze punten $0 \leq f(\zeta) \leq 1$ en de functie daar convex verloopt, bv.:

$$f(\zeta) = 1 - (1 - \zeta)^2 = \zeta g(\zeta)$$

Met $g(S)Sx = g(S)c$ (i.p.v. $Sx = c$) heeft men dan een "betere" vergelijking verkregen; $f(\zeta)$ is voor grote i practisch = 1 over het hele spectrum, dus $f(S) = g(S)$. S practisch de 1-matrix, zodat de nieuwe vergelijking door $x = g(S)c$ wordt opgelost.
Dus $S^{-1} \sim g(S)$. Nu is met $D = 1 - S$: $g(S) = \frac{1-D^2}{1-D} = 1+D+\ldots+D^{i-1}$

Deze methode levert dus hetzelfde als een vroeger behandelde (syl.VI). Er zijn echter zeker functies f te vinden, die meer presteren.

Bij ons procédé hebben we genoegen genomen met de schatting dat de grootste eigenwaarde van S kleiner dan het spoor van S is. Weet men om de een of andere reden meer af van de eigenwaarden, dan is het proces voor verbetering vatbaar.

CURSUS NUMERIEKE EN GRAFISCHE METHODEN.

XI

Foutentheorie; Vereffening; Statistiek.

Het is niet de bedoeling complete theorieen voor genoemde gebieden te ontwikkelen. We hebben het hier over de numerieke methoden. Een zeer aanbevelenswaardig boekje, dat echter vermoedelijk iets onder Uw wiskundig peil ligt, is J.J.A.Grobben: Waarschijnlijkheidsrekening en proefveldtechniek, 1947. Het nieuwe boek van H. Cramers ken ik nog niet; het is vermoedelijk te theoretisch voor U. Overigens weet ik niets, wat ik van harte zou kunnen aanbevelen.

Onder een experimentele grootheid (soms ook kort: grootheid) verstaan wij hier een wet om bepaalde metingen uit te voeren. We duiden grootheden aan door: $\boxed{\alpha}$, $\boxed{x}$, $\boxed{A}$ enz. De uitkomsten van de metingen kunnen getallen, vectoren, matrices, enz. (dus ook systemen van getallen) zijn. Hieronder vallen ook grootheden, die door zekere mathematische combinatieregels uit rechtstreeks gemeten grootheden zijn verkregen. B.v. de grootheid $\boxed{\alpha}+\boxed{\beta}$, die bepaald is door het voorschrift: voer de metingen $\boxed{\alpha}$ + $\boxed{\beta}$ uit en tel de uitkomsten bij elkaar op. Verwar hiermee niet de grootheid die ontstaat, wanneer $\boxed{\alpha}$ en $\boxed{\beta}$ gelijktijdig (dus onafhankelijk van elkaar) worden gemeten en men de bijbehorende meetresultaten bij elkaar optelt. Is f een functie van een aantal veranderlijken, dan is het duidelijk wat onder $\boxed{f(\alpha,\beta,\ldots)}$ verstaan moet worden. Let op het verschil tussen b.v. $\boxed{\alpha}+\boxed{\alpha}$ en $\boxed{2\alpha}$!

De metingen volgens de wet $\boxed{\alpha}$ vatten we samen in een rijvector α met n componenten (gaat die meting over een kolomvector, dan ontstaat dus een matrix). Het ideale geval is, dat alle metingen het zelfde resultaat opleveren. Alle componenten van de vector zijn dan hetzelfde, en dus is α een veelvoud van de vector (1,1,..1) die wij ook met e aanduiden. Wenst men een willekeurige rij metingen zo goed mogelijk aan te passen aan de ideale meting, dan zal men als eis stellen, dat de fout zo klein mogelijk wordt, d.w.z. men zal α zo bepalen, dat de afstand tussen $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ en αe zo klein mogelijk wordt. Dit zal dan het geval zijn als de verschilvector $(\alpha_1-\gamma,\ldots,\alpha_n-\gamma)$ loodrecht staat op de vector e, dus als het inproduct nul is: $\sum(\alpha_\nu-\alpha)=0$ of $\alpha=\frac{1}{n}\sum\alpha_\nu$. Dat is juist het rekenkundig gemiddelde: gem $\boxed{\alpha}$; in de zin van onze definitie is dit de beste aanpassing aan het ideale meetresultaat. De afwijking tussen het werkelijke en het ideale meetresultaat, kan men door de afstand tussen deze twee vastleggen, en wel meet men deze afstand volgens de gewone definitie <u>echter zo, dat $(1,1,\ldots,1)=e$ de lengte 1</u> krijgt. Deze afwijking, ook middelbare afwijking (standard deviation) genoemd, wordt dan mid. afw. $\boxed{\alpha}=\sqrt{\sum(\alpha_\nu-\alpha)^2}$, als α het gemiddelde der α_ν is. Is γ een nauwkeurig bekend getal, dan is gem. $\boxed{\gamma\alpha}=\gamma$ gem $\boxed{\alpha}$, mid.afw. $\boxed{\gamma\alpha}=|\gamma|$ mid.afw. $\boxed{\alpha}$. Hebben we van $\boxed{\alpha}$ resp. $\boxed{\beta}$ m resp. n metingen gedaan: $\alpha_1,\ldots\alpha_m$ resp. $\beta_1\ldots\beta_n$ dan zijn de $\alpha_i+\beta_j$ als mn metingen van $\boxed{\alpha}+\boxed{\beta}$ te beschouwen. $\sum_{ij}(\alpha_i+\beta_j)=n\sum\alpha_i+m\sum\beta_j=mn(\alpha+\beta)$ dus gem.$(\boxed{\alpha}+\boxed{\beta})$ = gem. $\boxed{\alpha}$ + gem. $\boxed{\beta}$.

Verder $\sum_{ij}\left[(\alpha_i+\beta_j)-(\alpha+\beta)\right]^2=\sum\left[(\alpha_i-\alpha)+(\beta_j-\beta)\right]^2=\sum\left[(\alpha_i-\alpha)^2+(\beta_j-\beta)^2+2(\alpha_i-\alpha)(\beta_j-\beta)\right]=n\sum(\alpha_i-\alpha)^2+2\sum(\alpha_i-\alpha)\sum(\beta_j-\beta)+m\sum(\beta_j-\beta)^2$

De middelste term van het laatste lid is nul, daar $\sum(\alpha_i-\alpha)=\sum(\beta_j-\beta)=0$

Dus (mid.afw. ($\boxed{\alpha}$ + $\boxed{\beta}$))^2 = (mid.afw. $\boxed{\alpha}$)^2 + (mid.afw. $\boxed{\beta}$)^2
(De "pythagoras" voor de middelbare afwijking!) analoog voor meer grootheden b.v. mid.afw. 1/k ($\boxed{\alpha}$+.....+ $\boxed{\alpha}$)=1/$\sqrt{k}$ mid.afw. $\boxed{\alpha}$

De som in het linkerlid bevat k termen. De formule betreft dus de middelbare afwijking van het gemiddelde over k waarnemingen.

Gaat men i.p.v. van $\boxed{x}$ uit van een p-dimensionale vector $\boxed{x}$ waarop n metingen (elk over alle p componenten) worden uitgevoerd, dan komt men op grond van dezelfde redenering in een np-dimensionale ruimte tot precies dezelfde resultaten. Het gemiddelde van de metingen $x_1,\ldots,x_n$ van de vector wordt door coordinaatsgewijze middeling verkregen en de middelbare afwijking door $\sqrt{\sum|x_i - x|^2/n}$ waar de vectorlengte $x_i x$ in de gebruikelijke zin genomen wordt.

Het is van belang om te weten, hoe gemiddelde en mid.afw. zich gedragen bij afbeeldingen van de x-ruimte op een andere y-ruimte (of bij coordinatentransformaties). Is de afbeelding een beweging (translatie + rotatie) dan blijven de afstanden vast, dus ook de op grond van de afstanden berekende dingen, gemiddelde en mid.afw. Is de afbeelding algemener van karakter, dan valt hiervan zonder speciale veronderstellingen niet zo'n precies oordeel af te geven. We beschouwen nu een lineaire afbeelding door middel van een matrix A. Zulk een afbeelding voert sommen in sommenover en het λ-voud van een vector in het λ-voud van de beeldvector over. Het begrip gemiddelde is dus invariant t.o.v. lineaire afbeeldingen. Bij A behoort een getal $|A|$, dat het maximum van de verhouding $|Ax|/|x|$ aangeeft Door A wordt een vector dus in een ten hoogste $|A|$ maal zo'n lange vector overgevoerd. De middelbare afwijking wordt dus ook ten hoogste met $|A|$ vermenigvuldigd.1)

De klassieke methode neemt echter met deze schatting geen genoegen. Men maakt een veronderstelling over de manier, waarop de gemeten waarden van $\boxed{x}$ rond het gemiddelde $\overline{x}$ verstrooid liggen,
2) b.v. dat alle punten op een sfeer met middelpunt $\overline{x}$ even veel kans hebben, onder de metingen $\boxed{x}$ voor te komen, dus dat de kans alleen afhangt van de afstand tot $\overline{x}$ (voor het gemak stellen wij in het vervolg $\overline{x} = 0$)2) Men veronderstelt dus een zo groot aantal metingen, dat deze bewering een practische zin heeft en men de sommen door integralen kan vervangen. (mid.afw. $\boxed{Ax}$)^2 wordt nu de integraalgemiddelde van $|Ax|^2 = x'A'Ax$ over een voldoend grote kolom $\overline{x}$ (=0). Deze is gemakkelijk te berekenen! Laat ξ_k de k-de coordinaat van x zijn, en de vorm $x'A'Ax = x'Sx = \sum \sigma_{ij}\xi_i\xi_j$ ($S=A'A$). Bij de integratie vallen alle gemengde termen weg, omdat de functie b.v. in de punten $(-\xi_1,\xi_2,\ldots)$ en $(+\xi_1,\xi_2,\ldots)$ tegengestelde waarden heeft. Alleen de kwadratische termen leveren een bijdrage. Nu is duidelijk (ook alweer wegens de gemaakte veronderstelling), dat $\xi_1^2,\ldots,\xi_p^2$ alle dezelfde integraal en dus hetzelfde integraalgemiddelde over de bol hebben, terwijl het gemiddelde van hun som over de bol het gemiddelde van $|x|^2$, dus de mid. afw. van $\boxed{x}$ is. Elke ξ_i^2 geeft dus de bijdrage mid.afw. $\boxed{x}/p$! Dus wordt (mid.afw. $\boxed{Ax}$)^2 = gem.x'Sx = ($\frac{1}{p}\sum\sigma_{ii}$ mid.afw. x)^2. Bij de afbeelding A wordt mid.afw. $\boxed{x}$ dus vermenigvuldigd met $\sqrt{x(S)/p}$, als x(S) het spoor van S is. Had elke regel van A de normaalgedaante van Hesse, dan zijn de $\sigma_{ii} = 1$, dus wordt die factor = 1. (Hieruit blijkt opnieuw, dat ook bij orthogonale A die factor = 1 is). Was A zelf al symmetrisch, dan is x(S) = kwadraatsom der eigenwaarden van A, dus die factor = mid.afw. der eigenwaarden van A (afwijking van de 0).

---

1) In de belangrijkste gevallen is deze factor $|A|$ = absolute waarde van de grootste eigenwaarde.
2) Het begrip sfeer correspondeert met boloppervlak; bol staat op de inhoud van de sfeer.

We hebben van de veronderstelling dat de waarden van $\boxed{x}$ **sferisch verstrooid liggen** (zie noot 2-XI,2) niet volledig gebruik gemaakt. We hadden met minder kunnen volstaan; toch is ook aan deze zwakkere veronderstellingen vaak niet voldaan. De sferische strooing gaat meestal al door een lineaire transformatie verloren d.w.z. de Ax behoeven nog niet sferisch te strooien als de x dit doen. De strooing zal ellipsoidaal worden. Aan een sfeer $|x| =$ constant beantwoordt in de y-ruimte een ellipsoide $|A^{-1}y| =$ constant en de hierop liggende punten hebben dezelfde kans. Zijn de componenten ξ_i van x uit één universum afkomstig, dat symmetrisch t.o.v. het gemiddelde strooit, dan geldenonze conclusies wel. Is $\varphi(\xi)\,d\xi$ de verdelingsfunctie van ξ dan is $\varphi(\xi_1)\cdots\varphi(\xi_p)\,d\xi_1\cdots d\xi_p$ die van x, en voor de integratie geldt dan hetzelfde als boven.

Weet men tevoren niets over het strooien, dan is de beste veronderstelling die, dat de strooing sferisch is. Anders is het goed van tevoren door het aanbrengen van geschikte normeringen of gewichten van tevoren enigszins voor een sferische strooing te zorgen.

Een bijzonder geval van een lineaire afbeelding. A is de orthogonale projectie op een q-dimensionale deelruimte. In een geschikt coordinatenstelsel heeft deze projectie de vorm $(\xi_1 \ldots \xi_p) \quad (\xi_1 \ldots \xi_q\, 0 \ldots 0)$ d.w.z. de laatste (p-q) coordinaten worden geannuleerd. Het spoor (dat immers van het coordinatenstelsel afhankelijk is) is dus q. Dus wordt de mid.afw. bij projectie met $\sqrt{q/p}$ vermenigvuldigd.

We passen dit nu toe op de p metingen van een getalgrootheid $\boxed{\alpha}$, die wij vroeger tot een p-dim. vector α hebben samengevat. Het gemiddelde van $\boxed{\alpha}$ kwam dan tevoorschijn als beste aanpassing aan de veelvouden van e of als projectie op de rechte λe en de mid.afw. $\boxed{\sigma}$ als afstand van α tot deze rechte E. Nu kan het geval zich voordoen, dat die p metingen slechts een steekproef uit alle mogelijke metingen vormden. B.v. bij een natuurkundige proefneming behoort men de rij metingen eigenlijk onbeperkt voort te zetten en hieruit het gevraagde te berekenen. Of een verzekeringsmaatschappij moet niet alleen de mortaliteit van de tot nu toe verzekerden kennen, maar van de gehele clientele waarmee zij ooit te maken zou hebben. Of een landbouwkundig onderzoeker wil uit uit de opbrengst van zijn proefveld iets opmaken over de opbrengsten van al die velden, die volgens dezelfde methode worden behandeld. Men stelt zich nu voor, dat men niet één steekproef van p waarnemingen maar alle mogelijke neemt. Elk kan men weer door een p-dim. vector representeren. Onder de ware waarde van $\boxed{\alpha}$ (preciéser: ware gemiddelde) verstaat men nu het gemiddelde over al die afzonderlijke waarnemingen van $\boxed{\alpha}$ en analoog definieert men de ware mid.afw. Uiteraard kan men die niet berekenen. Toch wil men een behoorlijke gissing doen en deze voldoende rechtvaardigen. Dit geschiedt als volgt.

Streng genomen valt er met één steekproef van p waarnemingen niets over de rest te zeggen. Wat men wel kan doen is de onbekende ware waarde van α te elimineren. Dit kan gebeuren door de p-dim. ruimte te projecteren op de(p-1)-dimensionale op E (dus op e) loodrechte deelruimte F. Elk punt x wordt dan geprojecteerd in een punt van F, dat de afstand van x tot E aangeeft. Deze alleen behoeven we te kennen voor de berekening van de mid. afw. Waar de ware waarde op E ligt doet er niet toe. De ware mid. afw. gaat dus bij deze projectie over in één welke zonder de kennis van de ware waarde van kan worden berekend. We spreken van de "schijnbare mid.afw.". We hebben bewezen, dat bij de beschouwde projectie de mid.afw., wordt vernenigvuldigd met $\sqrt{\frac{p-1}{p}}$. We krijgen dus de ware mid.afw. uit de schijnbare door vermenigvuldiging met $\sqrt{p/p-1}$.

De ware mid.afw. is dus $\sqrt{\sum(\alpha_\nu-\alpha)^2/p-1}$! Men noemt deze ook wel de middelbare fout, voor zover de afwijkingen van de ware waarde het karakter van waarnemingsfouten hebben. Het gemiddelde van p waarnemingen, elk met een middelbare fout σ, heeft zelf een middelbare fout $\sigma/\sqrt{p}$. De ware middelbare fout op het gemiddelde wordt dus $\sqrt{(\alpha_\nu-\alpha)^2/p(p-1)}$. Men realisere zich echter goed, dat men hier uitsluitend de onkennis omtrent het ware gemiddelde heeft geelimineerd. Dat men in feite niet alle maar slechts één steekproef heeft genomen, valt op deze wijze niet te elimineren. Wel zal men, als men die eliminatie doorvoert, redenen moeten hebben om te veronderstellen, dat de genomen steekproef enigszins representatief is. D.w.z. dat de uit haar gevormde gemiddelden (dus ook mid. afw.) enigszins de ware waarden benaderen. Men kan dan ook opmaken, dat de mid.afw. op het gemiddelde van α maar een $\sqrt{p}$-de gedeelte van de mid.afw. op α is. Dat is dan inderdaad een belangrijk feit, want het toont aan, dat de mid.afw. op de gemiddelden omgekeerd evenredig met $\sqrt{p}$ afneemt. Hiervoor zijn inderdaad veel practische voorbeelden te vinden.

Met al deze redeneringen hebben wij natuurlijk niets te maken wanneer wij met de p waarnemingen van α het geheel der mogelijke waarnemingen uitputten. B.v. de gemiddelde leeftijd van de employé's van een bepaalde maatschappij. Of de gemiddelde taalschat van een bepaalde schoolklas in de vorm van het aantal bekende woorden (mits deze niet door steekproeven is vastgesteld) enz.

Opmerking: het begrip afstand waarmee wij hier hebben gewerkt is het gewone van de stelling van Pythagoras. Verstaat men onder afstand tussen twee punten het maximale absolute verschil van overeenkomstige waarden, dan wordt de beste aanpassin aan de ideale meting het gemiddelde tussen de grootste en kleinste meting. Werkt men met $\sum|\beta_\nu-\beta|/p$ als afstand der punten α en β, dan komt men terecht bij de centrale waarde (mediaan) als vervanging van het rekenkundig gemiddelde. De mediaan wordt gedefinieerd door stapsgewijze de uiterste waarden weg te laten; blijft er maar één over dan is dit de beste; blijven er twee over dan zijn alle waarden daartussen evengoed. Ook de centrale waarde wordt wel gebruikt in de praktijk. Hierbij wordt dan de gemiddelde afwijking (niet te verwarren met middelbare) $1/p\sum|\alpha_\nu-\alpha|$. Het rekenen met de middelbare afwijking wordt door haar relatie met de gewone metriek en tot het rekenkundig gemiddelde gerechtvaardigd.

Practische wenken.

Het is vaak een grote tijdbesparing bij het berekenen van het gemiddelde van $\alpha_1 \ldots \alpha_p$ eerst een provisorisch gemiddelde $\bar{\alpha}$ aan te nemen en dan de $\alpha_i-\bar{\alpha}$ te berekenen. Bij handige keuze van $\bar{\alpha}$ zullen dit kleine getallen zijn. Hun gemiddelde is $\sum(\alpha_i-\bar{\alpha})/p = \sum\alpha_i/p - \bar{\alpha}$, dus geeft de correctie, die men op $\bar{\alpha}$ moet aanbrengen om α te krijgen. Ook voor de berekening van de mid.afw. is dit nuttig. Men berekent eerst $1/p\sum(\alpha_i-\bar{\alpha})^2$. Volgens Pythagoras moet men hiervan $(\bar{\alpha}-\alpha)^2$ aftrekken om $1/p\sum(\alpha_i-\alpha)^2$ te verkrijgen.

Vaak heeft men een observatiemateriaal, waarbij het aantal waarnemingen het aantal verschillende observatiedata verre overtreft. Veel waarnemingen geven dus dezelfde uitkomst. B.v. de lichaamslengte van een duizendtal personen, gemeten in c.m. Men noteert het materiaal als volgt: 1e kolom de lichaamslengte in c.m. (onder 173 c.m. wordt dan precies verstaan 172,5-173,5 c.m.). In de tweede kolom komt het aantal personen met deze lengte. Bij de bewerking komt dan in de 3e kolom het positieve of negatieve verschil met een provisorisch gemiddelde. Nu behoren de overeenkomstige getallen van de 2e en 3e kolom met elkaar te vermenigvuldigen en dan op te tellen algebraisch. Dit kan men eenvoudiger als volgt

doen: men plaatst in de 4e kolom beginnende beneden en boven, en opklimmende resp. dalende tot het "midden" de "progressive totals" van de getallen in de 2e kolom. Daarna wordt de som van de 4e kolom gevormd (op de tekens letten!). Gedeeld door de som van de 2e kolom geeft dit de correctie op het provisorisch gemiddelde. Voor de berekening van de mid.afw. hoort men de kwadraten van de getallen in III met de getallen in II te vermenigvuldigen. I.p.v. dit vormen we nog eens de"progressive totals" nu van de 4e kolom, en plaatst deze in V. De dubbele som van V (zonder tekens) min de som van VI (zonder tekens) is dan de gevraagde provisorische kwadraatsom, die dan nog door de som van II (of één minder) moet worden gedeeld, en met het kwadraat van het verschil tussen provisorische en goede gemiddelde moet worden gecorrigeerd. Daarna trekken we de vierkantswortel.

3	4	3	3
	3	12	15
12	2	24	39
14	1	38	77
16	0	0	0
35	-1	-45	65
0	-2	-10	20
10	-3	-10	10
II	III	IV	V

(aantallen in II verschillen in III)

De aangegeven vereenvoudigingen berusten op de formules:

$$\sum_1^n i\,p_i = \sum_1^n P_i + \sum_2^n P_i + \sum_3^n P_i = q_1 + \cdots + q_n \text{ al. } q_j = \sum_{i=j}^{n} p_i \text{ . Verder}$$

$$\sum_1^n i^2 p_i = \sum_1^n (1+3+\cdots+(2i-1))\,p_i = q_1 + 3q_2 + 5q_3 + \cdots = 2(q_1 + 2q_2 + 3q_3 + \cdots)$$

$$-(q_1 + q_2 + \cdots) = 2\left[\sum_1^n q_i + \sum_2^n q_i + \sum_3^n q_i + \cdots\right] - \sum_1^n q_i .$$

Vraagstuk:

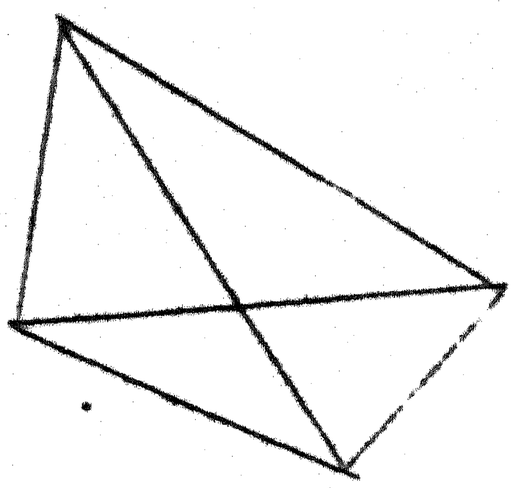
Borstomvangen

cm	aantal				
77	1	97	140		
78	0	98	103		
79	0	99	70		
80	1	100	70		
81	0	101	50		
82	1	102	24		
83	2	103	33		
84	3	104	18		
85	16	105	15		
86	19	106	13		
87	34	107	3		
89	60	108	2		
90	84	109	3		
91	97	110	5		
92	113	111	1		
93	131	112	1		
94	137	113	1		
95	130	114	0		
96	124	115	1		
		116	1		
88	46				

Bereken gemiddelde en middelbare afwijking! Bereken ook de centrale waarde! Vat daarna het materiaal samen in groepen van telkens 5 c.m. waarbij dus de eerste 79 genaamd loopt van 76,5 tot 81,5 en voer dezelfde berekening opnieuw door. Let er op, dat bij de toepassing der diverse kunstgrepen thans 5 c.m. de eenheid is! Vergelijk de uitkomsten. Neem thans uit het oorspronkelijk materiaal een steekproef en wel (volgens de borstomvangen geranschikt) 5e, 15e, 25e, 35e, enz. persoon. Dus de lijst begint dan met: 83:1 85: 86:4 87:4,enz.

Reken weer gemiddelde en middelbare afwijing uit en breng dit in verband met de foutentheorie!

Vereffening



Een voorbeeld vinden we in de figuur hiernaast. We denken ons n ($4 < n \leq 16$) hoeken onafhankelijk van elkaar gemeten. De meetresultaten zullen in het algemeen met elkaar in strijd zijn, d.w.z. niet voldoend aan de eis, dat de som van de hoeken van een driehoek 180 is. Onze taak is het nu de meetresultaten op een aan nemelijke wijze te vereffenen, zodat aan de theoretische eisen is voldaan. Hiervoor heeft men twee methoden, die bij juiste toepassing hetzelfde resultaat geven.

Lineaire relaties

1. Men drukt met de beschikbare relaties de n gemeten grootheden in enkele onder hen uit (in ons voorbeeld worden dus de gemeten hoeken in 4 hoeken uitgedrukt). Men krijgt daardoor een stelsel vergelijkingen $Ax = c$
waarin de elementen van A nauwkeurig berekend zijn, terwijl de vector $\boxed{c}$ de (onnauwkeurige) observaties samenvat. Dit stelsel van m vergelijkingen met n onbekenden ($m > n$) bezit over het algemeen geen oplossing. Men tracht een vector $x_{ver.}$ (vereffend) te vinden, die het zo goed mogelijk oplost.
2. Men vat alle n geobserveerde grootheden op als componenetn van een vector $\boxed{x}$. Deze componenten moeten aan een stelsel v van q onafhankelijke relaties voldoen, die wij lineair veronderstellen en in de vorm $Bx = b$
schrijven ($q < n$). B en b zijn hier nauwkeurig bekend. Het stelsel bezit over het algemeen (n-q) onafhankelijke oplossingen.
De geobserveerde vector (geheel der geobserveerde grootheden) voldoet er evenwel niet aan. Gevraagd wordt nu een vector x_{ver}, die er wel aan voldoet en $x_{obs.}$ zo goed mogelijk weergeeft.

Methode 1 wordt die der indirecte of bemiddelende observaties genoemd (men observeert $\boxed{c}$ maar wenst $\boxed{x}$ te kennen) terwijl de relaties tussen $\boxed{c}$ en $\boxed{x}$ bekend zijn). Methode 2. heet die der geconditioneerde observaties.

Voor deze twee methodes krijgen we het volgende schema:

1. $Ax = 0$	2. $Bx = b$
A hoger dan breed	B breder dan hoog
A nauwkeurig bekend	B en b nauwkeurig beken.
O geobserveerd	$x_{obs.}$ voldoet niet
strijdig	gevraagd $x_{ver.}$ die wel voldoet.
$Ax_1 = c_{ver}$ gevraagd	

Een ander voorbeeld van 1. is het volgende. Van een electronenbuis heeft men voor verschillende roosterspanningen E de anodestroom I gemeten. Men wil de uitkomsten door een lineaire functie voorstellen

$$I = aE + b$$

a en b zijn hier de onbekenden. Voor a heeft men dus evenveel ver-.

gelijkingen als observaties, terwijl twee vergelijkingen voldoende zou zijn. De vroeger A genoemde matrix bestaat uit twee kolommen: in de eerste de geobserveerde E en in de tweede steeds 1. Aan c van straks beantwoordt de kolom der geobserveerde I en ; a en b vormen de onbekende vector x.

Een voorbeeld voor 2 vinden we bij een electrisch net, waarvan de weerstanden bekend zijn. De stroomsterkten worden in verschillende takken gemeten. Deze blijken met elkaar in strijd te zijn en de uitkomsten moeten nu vereffend worden.

Problemen 1. en 2. zijn niet essentieel verschillend. Het ene kan op het andere worden teruggevoerd. Lost men nl. de (exacte) vergelijking bij 2. op dan krijgt men een voorstelling

$$X = Qu$$

voor x, waarbij n-q coördinaten van x in u mogen voorkomen. Substitueert men hier voor x de $x_{\ldots}$ dan heeft het stelsel de vorm van 1. met $x_{\ldots}$ inplaats van C en Q i.p.v. A en u i.p.v. x.

Omgekeerd kan men van 1 uitgaand, opmerken, dat 1 alleen dan oplosbaar is, als de rechterkant aan dezelfde relaties voldoet als de linker. De relaties waaraan de linker voldoet zijn door A exact bepaald. Dit geeft een stelsel relaties voor de rechter die vervuld moeten zijn dus van de vorm

$$Pc = p$$

waar nu c als onbekende moet worden opgevat. We beschikken over een gemeten c_{obs}. Dit wordt juist de formulering van 2.

Men kan een algemeen probleem formuleren:
3, $\boxed{x}$ wordt door de bemiddelende observaties c

$$Ax = c$$

en tevens door exacte voorwaarden

$$Bx = b$$

bepaald. Ook dit geval kan op de vroegere worden teruggevoerd, liefst door eliminatie van x uit de tweede groep.

We gaan nu over naar de behandeling van de vereffeningsvraagstukken met de"methode der kleinste kwadraten".

1. We veronderstellen, dat de coördinaten van c alle met dezelfde nauwkeurigheid zijn gemeten. We hebben nu met twee ruimten te maken de x-ruimte (dimensie = n = aantal onbekenden) en de c-ruimte (dimensie = m = aantal observaties). De x-ruimte wordt door A in de c-ruimte afgebeeld. Doorloopt x zijn hele ruimte, dan doorloopt Ax maar een deel E van de c-ruimte (wegens het dimensieverschil). Aan een gegeven c zal dus over het algemeen geen x beantwoorden: dit zal alleen het geval zijn als c op E ligt. Men is dus genoodzaakt $c_{obs.}$ door een $c_{ver.}$ te vervangen. De natuurlijkste methode is om c_{ver} zo dicht mogelijk bij c_{obs} te kiezen, maar natuurlijk tevens op E. Bij c_{ver} behoort dan een x_{ver} zo, dat $Ax_{ver} = c_{ver}$. We trachten dus

$$| c_{ver} - c_{obs} | = | Ax_{ver} - c_{ver} | = \text{minimum}$$

te vervullen, wat dus eigenlijk niets anders is, dan de methode der kleinste kwadraten. De oplossing ligt voor de hand: c_{ver} = de projectie van c_{obs} op E ofwel $(c_{ver} - c_{obs}) = (Ax_{ver} - v_{obs})$ moet op de hele E loodrecht zijn.
E bestaat uit alle Ax (x variabel) dus moet gelden

$$(Ax)'((Ax_{ver} - c_{obs}) = 0 \text{ of } x'A'(Ax_{ver} - c_{obs}) = 0$$

voor alle x, dus $A'(Ax_{ver} - c_{obs}) = 0$

of (1) $Sx_{ver} - A'c_{obs} = 0$ met $S = A'A$

Dit is precies hetzelfde als bij de methode van "steepest descent" voor lineaire vergelijkingen; alleen hadden we toen precies even-

veel vergelijkingen als onbekenden). Deze vergelijking is eenduidig oplosbaar zodra det. $S \neq 0$.det. $S = 0$ zou betekenen, dat een $x \neq 0$ bestant met $Sx = 0$ dus $x'Sx = 0$ of $0 = x'A'Ax = (Ax)'(Ax) = 0$ dus $Ax = 0$ met $x \neq 0$. Dit zou betekenen dat het stelsel vergelijkingen A niet voldoende is on x hieruit te berekenen. We veronderstellen dat dit niet her geval is. De vergelijkingen S zijn "normaalvergelijkingen" van Gauss. Zij bepalen ook $c_{ver} = Ax_{ver}$. We behandelen de kwestie van de fouten. Hebben we meer dan één observatieresultaat voor $\boxed{c}$ en stelt c_{obs} hun gem. voor dan is er ook een mid.afw. $\boxed{c}$ en c_{obs} bezit een mid.fout (= (mid.afw.)/(wortel uit aantal observaties)) aangeduid met Sc_{obs}. Welke invloed heeft deze op de vereffening? Door projectie op E wordt elke vector c in twee componenten gesplitst, de één in E, de ander in de op E loodrechte deelruimte F; de laatste component is dan juist de projectie van c op F. Hierbij wordt de middelbare fout Sc_{obs} resp. met $\sqrt{m/m}$ en $\sqrt{\frac{m-n}{m}}$ vermenigvuldigd (zie vorige syllabus). Met deze gandelen treedt nu de middelbare fout in c_{ver}, resp. $c_{obs} - c_{ver}$ op. Uit (1) is ook te berekenen, hoe x_{ver} beinvloed wordt. Deze in c_{obs} zittende fout moet niet worden verward met de vereffeningsfout

$$c_{obs} - Ax_{ver} = c_{obs} - c_{ver} = \delta_{ver} c_{obs}$$

(Helaas gebeurt dit bijna altijd). We moeten twee gevallen onderscheiden en wel:

a(De vergelijkingen $Ax = 0$ moeten werkelijk exact gelden (alleen de 0 zijn onnauwkeurig). Voorbeeld: k hoeken in één punt worden gemeten: hun som moet 360 zijn. Of bij nivelleringen tussen een aantal punten: er bestaan relaties tussen de hoogteverschillen. Of in het geval van sferische driehoeken, waarbij rekening wordt gehouden met het sferisch exces. In zulke gevallen behoort de waarde van $\boxed{x}$ op E te liggen. $\delta_{ver} c_{obs}$ moet enigszins beantwoorden aan $\sqrt{\frac{n}{m}}\, \delta c_{obs}$. Is dit niet het geval dan wijst dit op een systematische fout.

b) Men weet van tevoren, dat $Ax = 0$ maar bij benadering geldt Zie het eerste voorbeeld bij 1.: alle relaties zijn hier niet lineair. Of: men verwaarloost het sferisch exces. Het geval kan zelfs zeer kras zijn: men weet wel degelijk, dat de afhankelijkheid niet lineair is (uitzetting als functie van de temperatuur, borstomvang als functie van de lengte, prijsindex als functie van de kostenindex enz.), maar wenst toch een lineaire voorstelling, omdat de formule anders te ingewikkeld wordt. Dan heeft het niet de minste zin naar de invloeden van de vereffeningsfout op x_{ver} en c en c_{ver} te vragen.

Nu is de situatie b.v. in de geodesie deze, dat de observatiefout δc_{obs} helemaal niet wordt geregistreerd: in het beste geval wordt het aantal observaties aangegeven. Ik begrijp de oorzaak hiervan niet. Men veronderstelt dan, dat de ware waarde van $\boxed{x}$ op E ligt (maar doet afstand van de controle hierop). Uit deze veronderstelling berekent men dan de mid.fout naar hetzelfde schema als vroeger (zie vorige syllabus) toen E de rechte langs c was. De ware waarde van $\boxed{x}$ is niet bekend. $|\delta_{ver} c_{obs}|$ ook wel $|\delta_{ver} c|$ genoemd voldoet nog aan een relatie met c'_{obs}. Immers

$$|\delta_{ver} c| = |c_{obs} - c_{ver}| = \sqrt{|c_{obs} - Ax_{ver}|^2} = \sqrt{(c'_{obs} - x'_{ver} A')(c_{obs} - Ax_{ver})} = \sqrt{c'_{obs}(c_{obs} - Ax_{ver})}$$

(wegens (1)) $= \sqrt{c'_{obs}\, \delta_{ver} c}$

In de veronderstelling, dat A en dus E precies vastligt representeert $|\delta_{ver} c|$ slechts de schijnbare mid.fout d.w.z. de component van de mid.fout loodrecht op E. Deze is zoals we vroeger zagen, met de factor $\sqrt{m-n/m}$ te klein. De ware mid..fout wordt dus

$$|\delta_{obs} c| = |\delta_{ver} c| \sqrt{m/m-n}$$

Wegens (1) is $\delta_{ver} c$ van 0 betekent dit $\delta_{ver} c / m-n$. Hieruit kan volgens (1) de mid.fout van x_{ver} worden berekend. Voor deze hele berekening geldt hetzelfde als wij bij de ware fout van directe observaties hebben geconstateerd.

Voor elke coordinaat van O betekent dit $|\delta_{ver}c|$. Hieruit kan volgens (1) de mid.fout van x_{ver} worden berekend. Voor deze hele berekening geldt hetzelfde als wij bij de ware fout van directe observaties hebben geconstateerd.

Men kan dezelfde kwestie ook nog anders behandelen: zij [c] N keer geobserveerd. We vormen nu niet gem. [c] maar beschouwen de N observaties $O_1 \ldots\ldots O_N$ afzonderlijk, en gaan dus over op nN dimensies. We schrijven de stelsels

$$A\,x = O_1$$
$$A\,x = O_N$$

onder elkaar (nN vergelijkingen met n onbekenden). De bijbehorende normaalvergelijkingen hebben de matrix

$$(AA', A', \ldots, A')\begin{pmatrix} A \\ \vdots \\ A \end{pmatrix} = NA'A$$

en dus krijgen we $N.A'Ax = A'c_1 + \ldots + A'c_N$

of $$A'Ax = \frac{A'c_1 + \ldots + c_N}{N} \quad (= A'\,c_{obs.})$$

We krijgen dus voor x hetzelfde als daarstraks, toen wij het gemiddelde c_{obs} van [c] namen. Anders staat het met de fout. We hebben alleen met $|\delta_{ver}c|$ te maken. Dit is dus $\sqrt{1/N \sum |c_\nu - c_{ver}|^2}$ wat niet hetzelfde is als $|c_{obs} - c_{ver}|$ $(c_{obs.} = \text{gem. } [c])$.

We hebben veeleer $1/N \sum |c_\nu - c_{ver}|^2 = 1/N \sum |c_\nu - c_{ver}|^2 + |c_{obs} - c_{ver}|^2$

Bij deze methode wordt dus de vereffeningsfout (volgens Pythagoras) met de observatiefout samengegooid.

Tot nu toe hebben we verondersteld, dat alle coordinaten van [c] even nauwkeurig waren geobserveerd. Hebben deze echter verschillende mid.fouten dan kan hiermee als volgt rekening worden gehouden. De mid.fouten zijn omgekeerd evenredig met de vierkantswortel uit het aantal observaties. Men kan nu elke coordinaat van c van een gewicht p^2 voorzien (p^2 evenredig met het aantal observaties; p omgekeerd evenredig met de mid.fout). Elke vergelijking uit het stelsel Ax=c beantwoordt op zich zelf aan één observatie. Wil men met het gewicht rekening houden dan schrijft men zulk een vergelijking dus p^2 maal op. Heeft c de coordinaat γ_ν met de gewichten p_ν^2 $(\sum p_\nu^2 = 1)$ dan wordt de afstand in de c-ruimte, die minimaal moest worden gemaakt nu niet door $\sqrt{\sum |\gamma_{obs.,\nu} - \gamma_{ver.,\nu}|^2}$ maar door $\sqrt{\sum p_\nu^2 |\gamma_{obs.,\nu} - \gamma_{ver.,\nu}|^2}$ gemeten. Dit komt op hetzelfde neer alsof wij de ν-de rij van het stelsel Ax=c met p_ν hebben vermenigvuldigd, dus met een getal evenredig aan de reciproke van zijn mid.fout. Op die manier krijgen dus alle coordinaten dezelfde mid.fout. . Dit is dan een andere formulering van hetzelfde proces, die misschien nog practischer is.

Men kan dit nog generaliseren: gesteld, dat [c] niet sferisch strooit, maar ontstaan is door een lineaire afbeelding, uit een vector, die wel sferisch strooit, O=T d: det. $T \neq 0$; $Ax = O$ kunnen we niet rechtstreeks behandelen; wel $T\,Ax = d$.
De normaalvergelijkingen luiden nu:

$$(T^{-1}A)'\,T^{-1}A)'d \text{ of } A'T^{-1}{}'T^{-1}Ax = A'T^{-1}{}'\,T^{-1}O$$

(1*) of $A'\,U^{-1}Ax = A'\,U^{-1}c$ met $U = TT'$

Het vorige geval kwam er nu juist op neer, dat men [c] ontstaan dacht uit [d] met sferische strooing door vermenigvuldiging met

(XII,5)

een diagonaalmatrix $\begin{pmatrix} p_1 & & \\ & \ddots & \\ & & p_n \end{pmatrix}$ overeen. De formule komt hiermee

Men kan hieruit nog het volgende opmaken: bij een gewoon stelsel vergelijkingen mag men de afzonderlijke vergelijkingen willekeurig van factoren voorzien en lineair combineren. Bij de vereffening is dat niet toegestaan (al gebeurt het in de practijk dan toch op de meest roekeloze manier): de resultaten veranderen daardoor geheel willekeurig. Wel zijn alle operaties toegelaten, die de afstand in de O-ruimte invariant laten, dus translaties en draaiingen, speciaal ook verwisselingen van de coordinaten van O. De vereffening is dus onafhankelijk van de volgorde der vergelijkingen.

Opmerking: hebben de coordinaten verschillende nauwkeurigheid dan is de meest practische methode, om ze op gelijke nauwkeurigheid te normeren. Men ontloopt dan het lastige rekenen met gewichten.

2. We behandelen nu de geconditioneerde observaties. We veronderstellen, dat alle coordinaten van de vector x even nauwkeurig zijn. (is dit niet het geval dan kan men weer overeenkomstig normeren). In $Bx = b$ zijn nu B en b nauwkeurig bekend. B is breder dan hoog. We hebben een x-ruimte (n-dimensionaal) en een b-ruimte (q-dimensionaal). Door B is de één in de ander lineair afgebeeld. Die x'en, die aan $Bx = b$ voldoen, vormen een lineaire varieteit E in de x-ruimte. $x_{obs.}$ wijkt er van af; $x_{ver.}$ behoort er op te liggen $|x_{obs.} - x_{ver.}|$ moet minimaal worden, dus $x_{obs.} - x_{ver.}$ moet loodrecht op E staan. Bij twee punten x en x' van E voldoet $x'-x$ aan $B(x'-x) = 0$. De vector van x naar x' is dus gekenmerkt door de eigenschap, loodrecht te staan op elke rijvector van B. De rijvectoren van B brengen dus de op E loodrechte ruimte F voort. Hiertoe moet $x_{obs.} - x_{ver.}$ behoren en moet dus een lineaire combinatie zijn van de rijen van B. Ofwel

$$x_{obs.} - x_{ver.} = B'u$$

voor een geschikte q-dimensionale vector u. We passen hierop B toe Wegens $Bx_{ver} = b$ is dus $BB'u = Bx_{obs} - b$.
De rechterkant is niets anders dan de fout, die men krijgt als men eenvoudig $x_{obs.}$ in Bx-b substitueert; we noemen hem Δ. Dus

$$(2^a) \qquad BB'u = \Delta$$

bepaalt eenduidig u (tenzij $BB'u=0$ en dus $B'u=0$ een oplossing $u\neq 0$ bezit, wat echter zou betekenen, dat dit stelsel niet onafhankelijk was). Uit

$$(2^b) \qquad x_{ver} = x_{obs} - B'u$$

berekent men dan $x_{ver.}$.

Alle kwesties aangaande mid.fout, observatiefout en ver vereffeningsfout zijn weer dezelfde als bij probleem 1. Strooit x niet sferisch, maar is hij door een lineaire afbeelding T afgeleid uit een sferische strooing y, dan behandelt men het vereffeningsvraagstuk voor y. Dus $x=Ty$, $BTy=b$; $y_{ver}=y_{obs} - (BT)'b$

$$(2^a)^* \qquad BTT'B'u = \Delta$$

$$(2^b)^* \qquad x_{ver}=x_{obs} - TT'B'u$$

Algemene opmerking: in de methode der kleinste kwadraten zit ongetwijfeld een zekere willekeur, theoretisch gesproken, niet grote

dan die wij begaan, wanneer wij ons van het gemiddelde als "ware waarde" bedienen en wanneer wij de middelbare fout boven andere foutbepalingen prefereren. In de practijk wordt die willekeur echter vergroot doordat de als onafhankelijk voorgestelde observaties het meestal helemaal niet zijn, en omdat men sferische strooing vaak ten onrechte veronderstelt. Toch valt dat in zijn consequenties meestal nogal mee. Daarentegen is de elimination van de systematische fout door het minimumbeginsel zuiver willekeur. Dat doet aan de betekenis van de methode geen afbreuk. Voor Gauss zat men in de geodesie en astronomie met vergelijkingenstelsels, die niet klopten noch willekeuriger te knoeien. De methode der kleinste kwadraten heeft tenminste het voordeel objectief te zijn.

Niet-lineaire relaties.

We hebben zowel bij de indirecte als bij de geconditioneerde observaties tot nu toe de lineariteit van de relaties verondersteld. Vaak heeft men echter met niet lineaire betrekkingen te maken. Soms kan men dit nog wegwerken (b.v. de hoogte als functie van de luchtdruk is een logarithmische functie; men kan evenwel vanaf het begin met de log. uit de luchtdruk werken). Soms is de niet-lineariteit essentieel. Laten we dus het geval behandelen, dat tussen de onbekende vector $x = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ en de observatievector $c = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ algemene exacte relaties bestaan moeten

$$F_\nu(\xi_1, \dots, \xi_m) = \gamma_\nu \qquad \nu = 1 \dots m$$

die door waarnemingsfouten evenwel niet blijken te bestaan. Nu kan men in het algemeen zulk een relatie in de buurt van een vast punt als lineair opvatten. Daarom ontwikkelen we in de omgeving van een provisorische oplossing $(\overline{\xi}_1, \dots, \overline{\xi}_m)$

$$F_\nu(\xi_1 \dots \xi_m) = F_\nu(\overline{\xi}_1, \dots, \overline{\xi}_m) + \frac{\partial F_\nu}{\partial \xi_1}(\overline{\xi})(\xi_1 - \overline{\xi}_1) + \dots + \frac{\partial F_\nu}{\partial \xi_m}(\xi_m - \overline{\xi}_m) + \dots$$

Men verwaarloost nu hetgeen door de stippen is aangeduid en dan bevindt men zich weer in het geval van lineaire vergelijkingen. Analoog bij geconditioneerde observaties.

VRAAGSTUKKEN:

1. Nivellering. PQ = 1 betekent, dat P de hoogte 1 boven Q bezit. Gegeven de volgende observaties:

1) $z_1 0 = 573{,}08$
2) $z_2 z_1 = 2{,}60$
3) $z_2 0 = 575{,}27$
4) $z_3 z_2 = 167{,}33$
5) $z_4 z_3 = 3{,}80$
6) $z_4 z_2 = 170{,}28$
7) $z_4 z_5 = 425{,}00$
8) $z_5 0 = 319{,}91$
9) $z_5 0 = 319{,}75$

] onafhankelijk van elkaar gemeten.

Observatie 9 bezit het gewicht 1
" 3-8 " " " 4
" 1-2 " " " 25

De middelbare fout beantwoordend aan de eenheid van wicht is:0,50. Gevraagd wordt de observaties te vereffenen eventueel een systematische fout vast te stellen. Zowel met

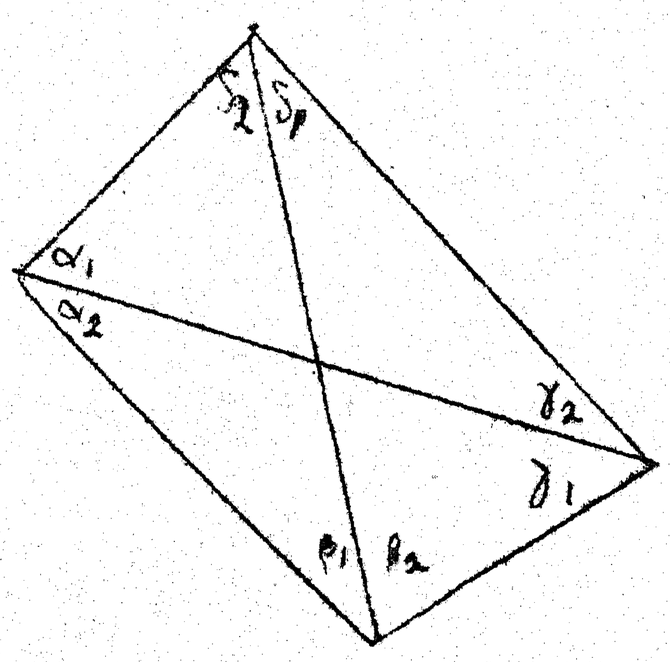
als 2. mag worden gevolgd. Doe hetzelfde als de mid.fout voor de gewichtseenheid niet a priori bekend is.

2.

t	x
28	11,71
66	12,90
173	16,40
248	20,00
298	22,20
400	23,75
505	26,45
548	27,70

In nevenstaande tabel is de temperatuur t gegeven voor enkele diepten x. Deze te vereffenen volgens een kwadratische functie $t=a_0 + a_1 t + a_2 t^2$.

3. In de vierhoek ABCD zijn de hoeken $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \delta_2$ gemeten (zie figuur). Schets in formules de gang van de vereffening! (zonder numerieke gegevens)



Vereffening van N empirische gegevens (x_i , y_i) , i=1.....N **door functies van bepaalde soort.**

Gevraagd is b.v. een n-de-graads-veelterm y=f(x) , die de gegevens zo goed mogelijk weergeeft.Zodra N > n+1 is dat een vereffeningsprobleem doordat er meer gegevens dan onbekenden zijn (onb.=coeff. in f).

Algemener: er wordt ontwikkeld naar een stel functies $\varphi_0, \varphi_1 \dots$; men moet dus de coefficienten a_ν bepalen in $f(x) = \sum_0^n a_\nu \varphi_\nu(x)$ zo ,dat f(x) zo goed mogelijk aan de gegevens (x_1,y_1) is aangepast.(Het vorige probleem ontstaat voor $\varphi_\nu(x) = x^\nu$).Nu bezit

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \varphi_\nu(x_i) = y_i$$

in het algemeen geen oplossing $(a_0 \dots a_n)$, als N > n+1 .Daarom eisen we weer,dat de kwadraatsom der fouten minimaal wordt. $\varphi_\nu(x_i)$ is dus hier de matrix A; de y_i vormen de vector c en de a_ν, de vector x. De normaalvergelijkingen luiden: $\sum_{\nu=0}^{n} \sum_{i=1}^{N} \varphi_\mu(x_i)\varphi_\nu(x_i) a_\nu = \sum_i \varphi_\mu(x_i) y_i$.
De matrix $A'A$ met de termen $\sum_i \varphi_\mu(x_i)\varphi_\nu(x_i)$ is reeds voor $\varphi_\nu = x^\nu$ vrij ingewikkeld (bij aequidistante x_i houden de termen verband met de getallen van Bernoulli).Kiest men echter de φ_ν'en handig dan kan men met betrekkelijk weinig werk volstaan.Vooral wanneer men een groot aantal vereffeningsproblemen van hetzelfde type (d.w.z. met de zelfde abcissen) moet behandelen,kan dit nuttig zijn.Men kan n.l. de $\varphi_0, \varphi_1 \dots$ (als veeltermen van de graad 0,1,...) steeds zo kiezen dat de matrix $A'A$ de eenheidsmatrix is.Het oplossen der normaalvergelijkingen wordt dan triviaal. Men moet er dus voor zorgen, dat $\sum_{i=1}^{N} \varphi_\mu(x_i)\varphi_\nu(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{wanneer } \mu \neq \nu \\ 1 & \text{,, } \mu = \nu \end{cases}$ is.Voor elke keuze der $x_1 \dots x_N$ is dat inderdaad mogelijk ($\nu < N$).Het zou nuttig zin om b.v. voor aequidistante abcissen (symmetrisch t.o.v. de oorsprong) een keer al deze veeltermen φ_ν tot een bepaalde graad te bepalen.Ook theoretisch zijn de φ_ν interessant. Ze doen denken aan veeltermen van Legendre. Er moeten ook analoge recursieformules als bij de veeltemen van Legendre gelden.Naar het mij voorkomt, geldt

$$\varphi_m = c_m \Delta^n \{(x-1)^2 - M^2)(x-2)^2 - M^2) \dots ((x-n)^2 - M^2)\}$$

waar Δ de differentie-operator is ($\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$). $M = \frac{1}{2}(N-1)$

en c_n een costante. Verder vermoedelijk $\Delta \varphi_n x \; 2n^2 \varphi_{n-1} + (2nx + n^2)\Delta \varphi_{n-1}$
Men zou echter een relatie als $\varphi_n = (a_n + b_n x)\varphi_{n-1} + c_n \varphi_{n-2}$
moeten hebben om de φ-en gemakkelijk te kunnen te berekenen. Misschien ... heeft iemand onder U voor deze kwestie belangstelling.

Neemt men voor de φ-enie trigonometrische functies $1/N$, $2/N.\cos 2\pi x$, $2/N.\sin 2\pi x$, $2/N\cos 2.2\pi x$, $2/N.\sin 2.2\pi x$,.....en voor x_i aequidisante abcissen van $-\frac{1}{2}$ tot $+\frac{1}{2}$, dan wordt $A' A$ eveneens de eenheidsmatrix. Dit volgt uit $\sum_{1}^{N} e^{\sqrt{-1}\, x_i} = 0$

Ponskaarten-methoden. (Systeem Hollerith, IBM)

Literatuur.Door de IBM zijn min of meer uitvoerige handleidingen uitgegeven.Binnenkort verschijnt een uitvoerige handleiding in het Nederlands voor het gebruik van de Tabulator onder de titel: "Beschrijving der IBM alphabetische tabelleermachine Type 405" en "Modellen behorende bij de beschrijving.....".Van de andere machines, zoals de "Multiplier", zijn er handleidingen in het Engels.De speciaal wiskundige toepassingen worden behandeld bij :W.J.Eckert, Punched cards methods in Scientific Computation, 1940.

De"ponskaart" = puncheard (zie bijlage) is in 80 kolommen verdeeld.In elke kolom zijn de cijfers 0....9 afgedrukt.Boven de 0 is een brede witte strook, waarin U zich nog de tekens x en y,11 en 12 kunt denken afgedrukt.(Voorhet practisch gebruik in de boekhouding zijn zekere kolommen tot groepen samengevat,naargelang van de speciale behoeften; boven deze groepen vindt U dan aanduidigen zoals "prijs", "stukprijs", "rente", "magazijnnummer" enz., die de betekenis van de afzonderlijke groepen voor de gebruiker toelichten. De machine weet van deze aanduidingen natuurlijk niets af.)

In de ponskaart worden zekere gegevens door de ponsgaten (=holes) vastgelegd; over het algemeen staat in één kolom ten hoogste één pnsgat; het valt met een der cijfers of met de denkbeeldige x of y samen.Het ponsen der kaarten geschiedt met speciale ponsmachines, die electro-magnetisch werken (zoals alle Hollerith-machines) en bediend worden door geoefend personeel, dat hierbij grote snelheden bereikt.De te ponsen gegevens worden van een manuscript afgelezen.Hierbij behoeft alleen op de in het manuscript aangegeven cijfers en letters te worden gelet.Het nodige spatieren geschiedt automatisch, doordat de wagen (ongeveer als bij een schrijfmachine) op bepaalde ogenblikken vanzelf verspringt.De ponsingen worden gecontrolleerd door een tweede persoon, die de kaarten precies als de eerste en volgens hetzelfde manuscript door de ponsmachine laat gaan afwijkingen manifesteren zich daardoor, dat de machine stopt.

Er zijn ook machines, die ponskaarten vermenigvuldigen, en ook die langs optische weg voorgeschreven ponsingen uitvoeren.

Het "lezen" van een ponskaart door de verschillende machines geschiedt door middel van de leeseenheden.Elke leeseenheid bestaat uit een borstel en een contactwals; de kaart glijdt hiertussen als een isolator door.Waar zich een ponsgat bevindt wordt het contact gesloten, en overeenkomstig de plaats van het ponsgat in zijn kolom wordt een stroomimpuls doorgegeven.Stond het ponsgat op zeker cijfer dan zal over het algemeen een bepaald telwiel over evenveel eenheden verder draaien als het cijfer aangeeft; maar zulk een impuls kan ook als "stuurimpuls" doorwerken (vooral dienen hiervoor de x- en y-ponsingen).Zulk een stuurimpuls kan b.v. betekenen, dat de m

moet overschakelen van optellen naar aftrekken, of dat de machine in een bepaald telwerk het totaal moet opmaken, of dat de gegevens van de onderhavige kaart in een bepaald telwerk moeten worden gestuurd enz.. Deze functie van de machine heet in het Engels "control".Dit woord betekent dus niet "controle", maar "leiding","bestuur",enz.."Automatic control" betekent, dat de machine zichzelf stuurt.

De gegevens worden door de machine dus afgelezen met de leeseenheden.Bij elke kolom behoort er één, maar vele machines bezitten zelfs twee stellen van 80 leeseenheden.Wanneer de ene kaart bij de "lower-brushes" is aangekomen, wordt de volgende al door de "upper-brushes" afgetast.Hierdoor is de machine in staat op elkaar volgende kaarten met elkaar te vergelijken.Waarvoor dit dient zult U later wel zien.

Tabulator.

Dit is de belangrijkste machine van een Hollerith-installatie.(N.B. Ook het woord "tabulator heeft in het Engels een andere betekenis dan in het Nederlands) Voor het schakelschema van deze machine, zie bijlage "Alphabetical Accounting machine Control Panel".De tabulator is een schrijvende optelmachine, die tot 9000 kaarten per uur kan verwerken.

We bespreken eerst de functie der "lowerbrushes".Het gegeven, dat de machine afleest in b.v. kolom 7 van de ponskaart kunt U als het ware uit het contactgat 7 van "lower-brushes" halen (zie bovenste derde van het schakelschema, doorlopend van de eerste naar de tweede afdeling van het schakelbord).U ziet daar in werkelijkheid twee gaatjes; het ene gaatje kunt U gebruiken, om hetgeen U er uithaalt, over te brengen naar naar een telwerk ("counter"); wat met het andere gaatje kan geschieden, zullen we later zien. Wilt U b.v. al die gegevens, die de machine in kolom 39-42 achtereenvolgens bij de verschillende kaarten afleest, in het telwerk 4C laten optellen, dan moet U op het schakelbord ("plugboard") de gaten 39-42 van "lower-brushes" verbinden ("to wire") met de gaten "Counter Entry 4C". U kunt dan uit "Counter Total Exit 4C" het totaal halen van alles, wat in"Counter Entry 4C" binnenkomt.Er zijn 16 telwerken gedeeltelijk voor 2,4,6,8 cijfers.Is de lengte van de afzonderlijke telwerken ontoereikend, dan kunt U twee of meer ook koppelen. Hoe dit geschiedt zullen we later zien. (Te koppelen telwerken behoeven niet naast elkaar in het schakelschema te liggen!)

De machine kan numerieke gegevens ontvangen en totalen schrijven. De schrijfstangen ("type bars") worden bestuurd vanuit 1) " the type-bar list entries" (1e-2de afd. boven), 2) de "type-bar total entries" (beneden).Men kan rechtstreeks de gegevens van de "lower-brushes" naar de "type-bars" overbrengen, maar men kan dat ook doen met de data zoals die in een bepaald telwerk binnenkomen.In beide gevallen bedient men

zich van de "type-bar list entries" (boven).Om de totalen van de afzonderlijke telwerken aan de schrijfstangen door te geven, moet men daarentegen van de "type-bar total entries" (beneden) gebruik maken.Het afdrukken geschiedt op een brede papierrol.In welke kolom van die rol de gegevens moeten worden afgedrukt, kan men bepalen door met de overeenkomsige contactgaten van de "type-bars" te verbinden.

De machine kan ook alphabetisch drukken.Op alles wat hiermee verband houdt, ga ik niet in, omdat het voor wiskundige toepassingen niet belangrijk is.

Het optreden van een kaart in de machine veroorzaakt een z.g. telimpuls.Deze impuls kan gehaald worden uit een der gaten "plug to C" (derde afd. boven).EEn telwerk, dat op een bepaald ogenblik een van de "lower-brushes" verkregen gegeven heeft te verwerken, moet eerst van "plug C " een telimpuls ontvangen, en wel door de plusgaatjes of mingaatjes, alnaargelang er moet worden opgeteld of afgetrokken.Zonder deze impuls doet het telwerk niets.De impuls wordt overgebracht door directe of indirecte verbinding van de +- of min-gaten van het telwerk met de gaten van "plug to C".Wat met deze constructie bedoeld is zullen we later zien.

De telwielen draaien bij optellen en aftrekken in <u>dezelfde</u> zin.Er wordt n.l. als het ware modulo 999...9 gerekend en het aftrekken van een getal wordt gerealiseerd door het optellen van zijn 999..9-complement, en wel op de volgende manier.De kaarten komen in de machine zo binnen, dat in elke kolom eerst de 9-positie wordt afgetast.Bij het optellen wachten de telwielen op het eerste ponsgat en beginnen dan te draaien;bij het aftrekken draaien ze meteen en stoppen bij het eerste ponsgat.Er wordt dus het 999..9-complement in het telwerk gebracht.Om nu werkelijk modulo 999..9 te rekenen moet de tientallen-overdracht van de meest linkse positie naar de eenheden (de meest rechtse positie) worden overgebracht,d.w.z. van 1 "voor" het getal wordt door een eenheid vervangen, dus er wordt 999..9 van de uitkomst afgetrokken.De bijbehorende schakeling bestaat hierin, dat het contact C1 ("carry 1") boven de meest linkse positie verbonden wordt met het contact C ("carry") boven de meest rechtse.Deze schakeling is bij aftrekken onontbeerlijk.Om nu echter te voorkomen, dat negatieve totalen complementair worden afgedrukt moet men nog een herleidingsmechanisme inschakelen.Men verbindt C1 met C niet rechtstreeks, maar via de bij het telwerk behorehde "counter balance control" (3de afd. beneden).Bij elke totaalslag herleidt dit mechanisme een complementair getal (kenbaar aan een 9 in de eerste positie) tot het "ware" getal.

De "counter balance control" is niet in alle uitvoeringen van de tabulator aanwezig.Bij de andere modellen wordt modulo 1000...0 gere[illegible]

Bij het aftrekken kan men dan het telwiel van de eenheden één punt vroeger laten beginnen te draaien door verbinding van "sup" met "substract unit position control" (3de afd. boven).De "9-impuls" werkt dus alleen op de andere posities.Derhalve moet bij 999..9 completering de verbinding "9-sup." altijd geschakeld zijn, om de 9-impuls ook op de eenheden over te brengen.

We komen nu tot de automatische besturing van de machine.Hier bij zijn twee verschillende principes toegepast.1)dat der"unequal impulses", 2)dat der selectie.

1)Zoals ik reeds zei is de machine in staat op elkaar volgende kaarten met elkaar te vergelijken.Merkt de machine in een bepaalde kolom een veschil op, dan geeft zij een "unequal impuls" door, die een aangewezen bestuursfunctie moet uitoefénen.Stelt U zich b.v. voor , dat op elke ponskaart volkstellingsgegevens van bepaalde teldistricten staan, en dat U die door de machine wilt laten optellen, maar dan zodanig, dat de machine ook de afzonderlijke gemeente- en provincietotalen (behalve het rijkstotaal) aangeeft.Op de ponskaart zullen dan de gemeente en de provincie, waarin het teldistrict zich bevindt,door nummers in bepaalde kolommen zijn aangeduid.De kaarten zijn op volgorde van die nummers gerangschikt.Zodra het gemeentenummer verandert melden de borstels, die de betreffende kolommen aftasten,dit aan "unequal impulses", en van hier gaat dan aan de met het optellen bezige telwerk de opdracht uit een totaal op te maken (een z.g. "minor total") Verandert tevens het provincienummer, dan wordt op de zelfde manier de opdracht verstrekt een "major total" op te maken.Bij fijnere verdelingen kan men ook nog van "intermideate total" gebruik maken, en ten slotte-niet automatisch maar door op een knop te drukken"- verkrijgt men nog een "final total".

De "unequal impuls" wordt dus verkregen door vergelijking van op elkaar volgende kaarten t.o.v. zekere kolommen, en hij bewerkt een z.g. totaalslag d.w.z. het stopzetten van de kaartentoevoer, het opmaken van een totaal in zekere telwerken, het schoonmaken van deze telwerken, en het weer op gang zetten van de machine.Vereist voor een totaalslag zijn drie gegevens.1)de kolommen, die door de machine bij b. de kaarten worden vergeleken, en wier afwijking over het al-dan-niet-uitvoeren van een totaalslag beslissen; we zullen ze de criteriumkolommen noemen-laten we zeggen,dat het de kolommen 14-16 zijn-. 2)De telwerken ,waarin(bij een afwijking van 14-16) getotaliseerd moet worden;laten we zeggen de telwerken 4B en 8C. 3) De soort totaal, die moet worden opgemaakt b.v. een"intermideate total".

Onder deze omstandigheden zou men nu 14-16 van de "upper-brushes" (de criteriumkolommen) verbinden met "comparing relays-plug from upperbrushes" en tevens 14-16 van "lower-brushes" met"compering relays-plug from lower-brushes" (3de afd. bovenste helft).Hier worden dus de twee op elkaar volgende kaarten t.o.v. de kolommen 14-16 met elkaar vergeleken.Laten we zeggen, dat als "comparing-relays"-contacten daar de gaten 7-9 zijn gekozen.Iets lager bij "unequal impulses" ,worden de uitkomsten van dit vergelijken afgetapt, en wel zou men daar de boven elkaar liggende gaten 8 en de boven elkaar liggende gaten 9 van "unequal impulses" met elkaar verbinden,om te bereiken,dat 7-9 als één greep worden behandeld.(De schuine verbindingen zijn intern)Het gat 7 van "unequal impulses" wordt met "inter" (één rij lager) verbonden, om een "intermideate" totaalslag te bereiken.Tenslotte moeten wij van de machine nog vertellen,dat zij"intermideate totals" behoort op te maken in de telwerken 4B en 8C.Hiervoor verbinden wij de gaten van 4B en 8C van "Counter Total Control" met de gaten "inter" van "Class of Totals" (3de afd. beneden).Op deze manier hebben we aan de machine alle gegevens voor de totaalslag verstrekt.

De totalen van de afzonderlijke telwerken verschijnen in de "Counter Total Exit"(1e-2de afd. beneden) en kunnen vandaar naar de schrijfstangen worden doorgegeven.Welk wiskundig gebruik men van de totaalbesturing kan maken ,zullen we later zien.Bijzonder nuttig voor wiskundige doeleinden zijn machines, die "progressive totals" kunnen vormen. Deze zijn echter in Nederland niet aanwezig.

2) We komen nu tot het tweede beginsel der automatische besturing Dat is de selectie.Hierbij worden niet twee op elkaar volgende kaarten met elkaar vergeleken, zoals bij "unequal impulses", maar elke kaart wordt op zichzelf bekeken.We hebben dan ook weer zekere criteriumkolommen, die beslissen, wat de machine met de andere gegevens uit de kaart moet doen.Naargelang hetgeen de machine in deze kolommen aantreft, zal zij bepaalde andere gegevens uit die kaart naar het een of andere tel werk sturen om daar te worden opgeteld of afgetrokken.Het criterium in de criteriumkolom waarop de machine hoort te reageren, kan òf een x-ponsing zijn (x-selectie) òf een willekeurige ponsing 0,9,x,y ("digit selection").

We behandelen eerst de x-selectie.De bedoeling hiervan is dus, dat de machine de onderscheiden kaarten anders behandelt naargelang z in de criteriumkolom (laten we zeggen kolom 7) een x-ponsing aantreft of niet.(Opmerking: x-ponsingen mogen niet worden aangebracht in kolommen, die ook de bestuursfunctie van "unequal impulses" moeten vervullen)We schakelen dan 7 van de "upper-brushes" naar een selector (1e-2de afd. beneden, 3de afd. boveh), laten we zeggen naar selector 3

(rechts boven),en wel naar het gat x (laatste kolom).(maken we van de selectoren links onderaan gebruik dan beantwoordt hieraan de x in bovenste rij.)Laten we nu veronderstellen, dat de gegevens uit de kolommen 34-40 verschillend moeten worden behandeld, al naargelang kolom 7 een x-ponsing heeft dan wel niet; b.v. zouden ze in het eerste geval naar telwerk 8A en in het tweede naar telwerk 8D worden gestuurd.Om dit te bereiken schakelen wij beide telwerken met de"lower-brushes" 34-40, maar we geven de telimpuls uit "plug to C" nu niet rechtsreeks naar deze twee telwerken, maar over de selector, die a.h.w. de functie van wissel vervult.We verbinden met "plug to C" een C ("common") van de gekozen selector 3 (b.v. uit de eerste kolom).De hierbij behorende X verbinden we met telwerk 8A, dat de gegevens met een x moet opnemen,terwijl we de NX ("no x") verbinden met telwerk 8D, dat de gegevens zonder x moet ontvangen.Naargelang er uit kolom 7 al dan geen x-impuls komt, wordt de telimpuls dus naar één der beide telwerken gestuurd.

De vergelijking van de selector met een wissel gaat dus niet helemaal op.Door een wissel wordt een trein (= gegevens uit de kolommen 34-40) hetzij naar de ene kant (8A) hetzij naar de andere kant(8D) gestuurd.Maar onze trein komt bij beide staions aan.Wat over de wissel loopt is de telimpuls, en die bewerkt dan ook pas,dat op het station notie wordt genomen van de aangekomen trein ,d.w.z. het gegeven wordt verwerkt door het telwerk.Op een toepassing van de selectors,waarbij deze inderdaad rechtstreeks de gegevens besturen, komen we nog terug.

Een belangrijke toepassing van de selectie is het totaliseren van gegevens, waarin positieve en negatieve summanden voorkomen.Laten we veronderstellen, dat de negatieve summanden gekenmerkt zijn door een x-ponsing in een bepaalde kolom.De "upper-brush" van deze kolom wordt uiteraard weer met de X van een selector verbonden; deNX-rij van deze selector wordt met de plus-tekens van het aangewezen telwerk verbonden, de X-rij met de min-tekens van dat telwerk; de telimpuls wordt uiteraard bij de C van de selector ontvangen en dus doorgegeven naar de plus(+) of naar de min(-).

Tot zover over de x-selectie.Bij "digit selection",waarbij dus alle ponsgegevens uit de criteriumkolom kunnen meewerken (we nemen b.v. weer 7 voor deze kolom) wordt "upper-brush" 7 verbonden met een DSC-contact (3de afd. midden).Moet de machine b.v. op het getal 3 uit kolom 7 op bepaalde wijze reageren, dan verbinden we gat 3 van de gekozen digit-selector met de D van een selector (links beneden of rechts boven). Uit de X-zijde van deze selector komt dan (het over C geschakelde)telimpuls, zodra in kolom 7 een 3 verschijnt.

De selectie kan ook worden gebruiktom gegevens ui t de zelfde kolommen over verschillende schrijfstangen te ditribueren, zo dat zij op verschillende plaatsen van de schrijfrol worden afgedrukt.Hiervoor maakt men gebruik van de ruimere selectors (1e-2de afd. beneden).De C hiervan verbindt men met de betreffende "lower-brushes",de Xen NX met de gewenste schrijfstangen.Men kan ook een inverse selectie uitvoeren. Men brengt dan gegevens van verschillende plaatsen van de kaart in de zelfde schrijfstang of hetzelfde telwerk.De gegevens ,die bij het verschijnen van een x moeten worden overgenomen verbindt men uit de "lower-brushes" uiteraard weer met de x-rij van de selector, en degenen die bij het ontbreken van x aan de beurt komen, met de NX-rij.Het telwerk of de schrijfstangen,waar ze naar toe moeten,wordt met de C-gaten van de selector verbonden. Tenslotte is er nog de "total selection" waarbij men zich van de "Tot."-contacten van de selectors bedient, en die dient voor het sturen van "totals"naar bepaalde schrijfstangen. In al deze gevallen loopt dus werkelijk het gegeven over de selector.

Voor het koppelen van telwerken moet men de respectievelijke plus- en min-gaten met elkaar verbinden.Verder moet men de tientallenoverdracht van de meest linkse positie van het "achterste" telwerk naar de meest rechtse van het voorste telwerk tot stand brengen.Dat geschiedt door verbinding van CI (achterste telwerk) met C (voorste telwerk).Overigens worden de telwerken als één behandeld.

Er resten nog een groot aantal details, die ik niet wil bespreken.Alleen de kaarten-teller wil ik nog noemen (rechts beneden:"card count").Verbindt men die met een telwerk, dan worden daar de door de machine verwerkte kaarten geteld.

Voor wiskundige toepassingen zeer belangrijk is de mogelijkheid om verkregen uikomsten i.p.v. te laten schrijven, in nieuwe kaarten te laten ponsen.Dit kan echter niet door de tabulator alleen geschieden, maar hiervoor is de koppeling nodig met een andere machine de "Summary Punch".Deze machine zullen we de volgende keer bespreken. Zeer belangrijk is ook de multiplier, ee, vermenigvuldigingsmachine, die eveneens volgende keer aan de beurt komt.Verder is er een sorteermachine, die kaarten sorteert volgens de gegevens uit bepaalde kolommen.Het wiskundig gebruik van deze machines zullen we aan voorbeelden uitleggen.

Correlatierekening.

We beginnen opnieuw met het probleem, een empirische afhankelijkheid tussen twee grootheden $\boxed{x}$ en $\boxed{y}$ door een lineaire functie te vereffenen. Geobserveerd zijn dus bij elkaar behorende waarden (ξ_ν, η_ν) van $\boxed{x}$ en $\boxed{y}$. We zoeken een vereffenende relatie

$$y = kx + b .$$

We vatten de x_ν als exact op, en k en b als onbekenden. De matrix van de normaalvergelijkingen luidt

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & \cdots & \xi_N \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \xi_N & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum \xi_\nu^2 & \sum \xi_\nu \\ \sum \xi_\nu & 1 \end{pmatrix}$$

en de normaalvergelijkingen zijn dus

$$\begin{aligned} \sum \xi_\nu^2 \, k + \sum \xi_\nu \, b &= \sum \xi_\nu \eta_\nu \\ \sum \xi_\nu \, k + \qquad b &= \sum \eta_\nu \end{aligned}$$

Uit de tweede vergelijking volgt, dat (gem. $\boxed{x}$, gem. $\boxed{y}$)op de vereffenende rechte ligt. We veronderstellen voor het gemak, dat gem. $\boxed{x}$ = gem. $\boxed{y}$ = 0. Dan wordt b = 0 en

$$k = \frac{\sum \xi_\nu \eta_\nu}{\sum \xi_\nu^2} \qquad (1)$$

Dit is dus de richtingscoefficient van de vereffenende rechte. We kunnen formule (1) ook als volgt ontstaan denken. We wensen een lineare afhankelijkheid van y t.o.v. x . Als "ideale" metingen van $\boxed{y}$ treden dus op de vaste veelvouden van $\boxed{x}$: $\boxed{kx}$. De geobserveerde waarden van $\boxed{y}$ worden tot een vector y samengevat en deze vector moet dus aangepast worden aan de lijn E , thans de scalaire veelvouden van de vector x , die de metingen van $\boxed{x}$ samenvat. Deze aanpassing (met minimale fout) geschiedt door y op x loodrecht te projecteren; de projectie van y op x luidt nu

$$|y| \cos\varphi \cdot \frac{x}{|x|} \quad (\varphi \text{ is de hoek } (x,y)) \quad \text{of} \quad \frac{x'y}{|x|^2}$$

De beste aanpassing van y aan x luidt dus kx met

$$k = \frac{x'y}{|x|^2}$$ wat dus met (1) identiek is .

Men kan echter ook vragen de gegeven waarden door een lineaire fu-

$$x = ly + c$$

te vereffenen, dus omgekeerd x aan y aan te passen. Men verkrijgt

c = 0 en $$l = \frac{\sum \xi_\nu \eta_\nu}{\sum \eta_\nu^2} = \frac{x'y}{y'y}$$ (?

l is dan weer de richtingscoefficient van de vereffenende rechte.

Er bestaat geen reden om aan te nemen , dat deze rechten tiek moeten zijn, dus dat $kl = 1$ is. Dit zou immers betekenen, dat l. getal $\frac{(x'y)^2}{(x'x)(y'y)}$ = 1 zou zijn. Dit getal stelt niets anders voor dan het k

van de cosinus van de hoek tussen de vectoren x en y , en die wordt alleen dan = 1 ,als beide vectoren de zelfde of tegengestelde richting hebben,dus als exact geldt

$$\eta_\nu = k\,\xi_\nu \qquad (\nu = 1,..,N)$$

Men noemt nu het getal

$$r = \frac{x'\,y}{|x|\,.\,|y|} = \text{cos. hoek } (x,y)$$

de correlatiecoefficient van het groothedenpaar $\boxed{x}$, $\boxed{y}$ (uiteraard is $-1 \leqq r \leqq +1$).Als $r = \pm 1$ is, dan is er een exacte lineaire afhankelijkheid tussen $\boxed{x}$ en $\boxed{y}$ en wel bij $r = 1$ gelijkzinnig en bij $r = -1$ tegengesteld.Algemeen meet r zoiets als de afwijking van de lineariteit in de relatie tussen $\boxed{x}$ en $\boxed{y}$. Soms drukt men de correlatiecoefficient in % uit.Bij $r > 0$ resp. $r < 0$ spreekt men van een positieve resp. negatieve correlatie.

Berekent men voor elke ξ het gemiddelde van alle hierbij behorende waarden η van $\boxed{y}$ dan krijgt men een rij punten, die verbonden een z.g. regressiekromme vormen. Een andere regressiekromme krijgt men door bij elke η het gemiddelde der bijbehorende waarden ξ van $\boxed{x}$ te berekenen.Is zo'n regressiekromme een rechte, dan is zij tevens een vereffeningsrechte $y = kx$ resp. $x = ly$ .Daarom worden k en l ook de regressiecoefficienten genoemd.

$r = 0$ krijgt men als de vereffeningsrechten op elkaar loodrecht zijn, dus b.v. wanneer de regressiekrommen rechten zijn ,die loodrecht op elkaar staan.Een bijzonder kras voorbeeld is het volgende : voor elke ξ is het gemiddelde der η's hetzelfde en voor elke η is het gemiddelde der ξ's hetzelfde.Men zou hierin zo iets als onafhankelijkheid der grootheden $\boxed{x}$ en $\boxed{y}$ kunnen zien.

Welke objectieve waarde men aan de correlatiecoefficient wil hechten, hangt geheel af van de omzichtigheid, waarmee hij gebruikt wordt.U ziet ,dat hij vooral effectief is in de buurt van de striot lineaire afhankelijkheid.De mate van afwijking hiervan geeft hij vrij bevredigend.

Practische wenken.

In numeriek opzicht hebben we weer twee typen van vraagstukken. Aan het eind van deze syllabus in vraagstuk 9 vindt U naast elkaar p indexcijfers van twee graansoorten.Hier zijn bij elk gegeven x betrekkelijk weinig gegevens y en het heeft geen zin hier bijzondere kunstgrepen toe te passen, behalve dan het werken met provisorische gemiddelden moet n.l.

$$r = \frac{\sum \xi_\nu \eta_\nu}{\sqrt{\sum \xi_\nu^2}\,\sqrt{\sum \eta_\nu^2}}$$

vormen met de ξ_ν resp. de η_ν als afwijkingen van gem. $\boxed{x}$ resp

gem. $\boxed{y}$. Werkt men dus met een provisorisch gemiddelde δ resp. ε en zijn de ξ_ν' resp. η_ν' de afwijkingen van die provisorische gemiddelden, dan is $\xi_\nu = \xi_\nu' + \delta$, $\eta_\nu = \eta_\nu' + \varepsilon$ Dan wordt

$$\sum \xi_\nu \eta_\nu = \sum \xi_\nu' \eta_\nu' + \delta\varepsilon$$

(omdat $\sum \xi_\nu = \sum \eta_\nu = 0$) en

$$\sum \xi_\nu^2 = \sum \xi_\nu'^2 + \delta^2$$
$$\sum \eta_\nu^2 = \sum \eta_\nu'^2 + \varepsilon^2$$

Met deze correctie moet men dus rekening houden.

Bij het tweede type (zie vraagstuk I) heeft men voor elke waarde van $\boxed{x}$ (leeftijd van man) zeer vele waarden van $\boxed{y}$ (leeftijd van vfouw). Men zet in zo'n geval een schema op, zoals dat in vraagstuk I is geschied en vereenvoudigt dit weer door een provisorisch gemiddelde van $\boxed{x}$ en $\boxed{y}$ als nulpunt te kiezen en bovendien een geschikte eenheid (hier 5 jaar). Het schema wordt dan ongeveer:

	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	
-5									$p_{-5,}$
-4			$p_{-4,-3}$	$p_{-4,-2}$					$p_{-4,}$
-3									$p_{-3,}$
	$p_{,-5}$	$p_{,-4}$	$p_{,-3}$					$p_{,1}$	

In elk vakje (i,j) staat dan het aantal p_{ij} van (ξ, η)'s met de waarde i-j (d.w.z. het aantal huwelijken waarin de vrouw i jaar en de man j jaar is.)

Men vormt nu van elke rij en elke kolom afzonderlijk de som En schrijft die daarachter resp. daaronder. We schrijven

$$p_{i,} = \sum_j p_{ij}$$
$$p_{,j} = \sum_i p_{ij}$$

In de noemer van r treedt $\sum \xi_\nu'^2 = \sum_{ij} p_{ij}\, i^2 = \sum_i p_{i,}\, i^2$

en

$$\sum \eta_\nu'^2 = \sum_{ij} p_{ij}\, j^2 = \sum_j p_{,j}\, j^2$$

op. Deze uitdrukking kan men uit de toegevoegde rij en toegevoegde kolom door herhaalde "progressive totalisation" berekenen. In de teller van r staat $\sum \xi_\nu' \eta_\nu' = \sum_{ij} p_{ij}\, i\, j = \sum_i \left(\sum_j p_{ij}\, j\right) i$

Men berekent dus voor elke vaste i de uitdrukking $\sum p_{ij}\, j$ door progressive totalization voor de i-de rij. Deze getallen voegt men als nieuwe kolom aan het schema toe. Op deze kolom moet men weer progressive totalization toepassen om $\sum_i \left(\sum_j p_{ij}\, j\right) i$ te verkrijgen. Men kan ook nog (voor contrôle) omgekeerd te werk gaan (eerst kolommen, dan rijen). Tenslotte brengt men de nodige correcties voor eliminatie van het provisorisch gemiddelde aan. Voor de regressiekromme moet men uiteraard ook de gemiddelden der afzonderlijke rijen en kolommen berekenen.

Vraagstuk 1. Correlatie tussen de leeftijd der echtgenoten bij het huwelijk (Engeland en Wales 1933)

leeftijd van man in jaren.

V	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	Rijentotaal
15-	33	189	56	3	2	.	.	.	.	.	.	.	.	288
20-	18	682	585	106	19	5	2	1	.	.	.	.	.	1418
25-	1	140	511	179	40	14	6	3	1	1	.	.	.	896
30-	.	11	75	101	42	20	10	5	2	1	1	.	.	268
35-	.	2	10	24	28	19	13	8	5	2	1	.	.	112
40-	.	.	1	5	9	14	12	10	6	4	2	1	.	64
45-	.	.	.	1	3	5	9	9	7	4	3	1	.	42
50-	.	.	.	.	.	1	3	7	6	5	3	1	.	26
55-	.	.	.	.	.	.	1	3	5	4	3	1	.	17
60-	.	.	.	.	.	.	.	1	1	4	3	2	.	11
65-	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	3	2	1	8
70-	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	3

(V= leeftijd der vrouw)

8888888888888888888

Vraagstuk 2. Correlatie tussen twee indexcijfers.

1931 Jan.	78	84	1932	95	102	1933	92	84	1934.	82	80
Febr.	77	82		97	102		91	85		83	91
Maart	85	82		102	105		90	84		85	87
April	88	85		99	105		86	81		83	84
Mei	87	89		97	107		85	76		82	81
Juni	82	90		94	107		83	77		85	83
Juli	81	88		94	101		85	75		88	83
Aug..	77	92		97	106		83	79		101	92
Sept.	76	83		92	96		80	78		102	98
Oct.	83	89		89	90		78	78		98	94
Nov.	97	98		90	85		80	76		96	94
Dec.	93	99		90	81		83	75		98	95

Opmerking bij syllabus XIV (om een misverstand te voorkomen)
We hebben in hoofdzaak die methode van selectie beschreven,waarbij de telimpuls over de "wissel" (selector) wordt gesuurd,terwijl de numerieke gegevens over de "lower brushes" permanent verbonden zijn met de verschillende telwerken ,waar zij in het voorkomende geval naar toe moeten worden gestuurd.Men kan echter ook vaak (en dit wordt op p. 7 met voldoende nadruk gezegd) de numerieke gegevens ("de treinen") zelf over de selector sturen,waarbij dan de telimpuls ongesplitst en permanent met de selectoren verbonden blijft.Hiervoor zal men zichin het algemeen van de ruimere selectoren A-D (1e - 2de afdeling beneden) bedienen. De "lower brushes" van de kolommen, die de numerieke gegevens bevatten,worden dan permanent met de C (Commen) van de selector verbonden en wel elke cijfer afzonderlijk; de telimpuls is permanent verbonden met de telwerken.De "upper brush" van de criteriumkolom is met de bovenste X van de selector verbonden (of bij digit-selecton met de D) ,natuurlijk via comparing relays, unequal impulses enz. De X en "no X" van de selector zijn -ook weer cijfergewijs- met de twee in aanmerking komende telwerken verbonden.

Automatic reproducing punch Type 513 (zie bijlage schakelschema)
Deze machine kan gebruikt worden 1) voor het reproduceren van ponskaarten op grote schaal en met grote snelheid (6000 per uur). 2)Na koppeling met de Tabulator ook voor het automatisch ponsen van door de tabulator verkregen uitkomsten in poskaarten.In deze hoedanigheid heet de machine ook Summary Punch.

1) De machine heeft twee kaarteningangen , de één voor de te copieren kaarten, de ander voor de verse kaarten,waarin gecopieerd moet worden. De eerste bezit een volledig stel van twee maal 80 leeseenheden; bij de tweede is één stel van 80 leeseenheden door een stel van 80 ponseenheden vervangen.Aan de"reproducing brushes" (boven) van de ene ingang beantwoorden dus de "punchmagnets" (boven het midden) van de tweede ingang, die de ponsingen bewerkstelligen.Het andere stel borstels bij de eerste ingang, en het stel borstels bij de tweede ingang doen dienst om in de zelfde gang de originele met de nieuwe ponsingen te vergelijken (zie onderste helft).Nieuwere uitvoeringen van deze machine kunnen ook kaarten ,die door potloodstrepen (i.p.v. ponsingen) gemerkt zijn copieren, d.w.z. in ponsschrift a.h.w. vertalen.Het aflezen geschiedt bij deze typen op photo-electrische weg (M.S. brushes = Mark sensing).

2)Bij aansluiting van deze machine op een Tabulator kunnen niet alleen totalen maar ook andere gegevens in de nieuwe kaarten worden overgenomen.Dit moet echter altijd via een telwerk geschieden.Om b.v. een groepnummer over te brengen, verbindt men in de Tabulator "First Card Control" (3de afd.boven) met dat telwerk;bij de betreffende totaalslag wordt dit nummer dan uit het telwerk in de nieuwe kaart overgebracht en het telwerk schoongemaakt.De verschillende "Counter Total Exits" van de Tabulator worden nu verbonden met de contactgaten van de "Summary Punch",die de zelfde naam dragen, en hetzelfde geldt voor de "Summary x Punch Control" van de Tabulator(3de afd. beneden),die voor het besturen van de "Summary Punch" dient.Het schakelschema van de"Summary Punch" spreekt haast vanzelf, en essentiele bijzonderheden zijn daar niet te vermelden.

Electric Multipier Type 601.
Zie hiervoor Bijlage"Schakelschema Automatic Multiplying Punch Type 601".In tegenstelling tot de tabulator is deze machine in staat vermenigvuldigen.Bij de meeste rekenmachines berust het vermenigvuldi op herhaald optellen.De multiplier werkt volgens andere principes.De taire produsten m.n ($0 \leq m,n \leq 9$) zijn in de machine a.h.w. voorradig (evenals bij het gewone cijferen in ons geheugen).Ze worden bij geg vermenigvuldigingssommen overeenkomstig de behoeften als partiele p

ducten in het telwerk gestuurd.Daardoor worden grotere snelheden dan gewoon bereikt.Die worden nog verhbogd door het volgende snufje.Van een product zoals 4x7 = 28 worden de 2 en de 8 in afzonderlijke telwerken gestuurd: het linkertelwerk neemt de 2 op (left hand component, LHC), en het rechter de 8 (right hand component RHC).Bij een vermenigvuldiging zoals 2394x7 verschijnen dus met één slag de getallen 12620 in het linker en 4138 in het rechter telwerk, en geen enkele decimaal behoeft nu op de tientallenoverdracht van de voorafgaande te wachten. luidt de opgave 2394x1687 dan worden na elkaar in de twee telwerken de componenten gestort, die aan de vermenigvuldiging van 2394 met 7,8,6,1 beantwoorden.Dat zijn dus slechts vier slagen.Met een vijfde slag wordt dan het getal uit het rechter naar het linker telwerk overgebracht.Deze automatische overdracht van het rechter naar het linker telwerk wordt ook gebruikt om de machine de optelling van twee getallen te laten uitvoeren,die rechtstreeks in deze telwerken zijn gestort.Deze operatie heet "Cross.footing" (de Engelse term voor optellen van naast elkaar staande getallen).Behalve deze telwerken bezit de machine nog een"Summary Counter",die in staat is alle door de machine tijdens een zekere cyclus gevormde producten op te tellen.De stand van de "Summary Counter" is door een venster zichtbaar.

Het lezen van de ingevoerde kaarten geschiedt natuurlijk weer via borstels.Er zijn er 80,die aan de "lower brushes" van de Tabulator beantwoorden.Er zijn daarertegen maar 6 "upper brushes", die voor het besturen dienen volgens de aanwijzingen, die door de x-ponsingen worden gegeven.Deze 6 "upper brushes" kunnen boven willekeurige kolommen worden geplaatst;de x-ponsingen moeten natuurlijk eveneens in deze kolommen geschieden.In het schakelschema vindt U de "lower brushes" links iets beneden het midden.

Een groot gedeelte van het schakelschema spreekt vanzelf.De gegevens kunnen uit de borstels 1-80 worden overgebracht naar Multiplicand en Multiplier (eerste resp. tweede factor van een vermenigvuldiging); de contacten hiervoor zijn in de vijfde rij.Verder kan van de borstels ook verbonden worden naar RHC (7de rij), LHC (8e rij) en naar Summary Counter(9e rij).Er kunnen dus in één operatie vijf verschillende getallen worden gestort.De overdracht van RHC naar LHC is niet intern geschakeld, maar dat moet onder meer geschieden door de"plugging" rechts even onder het midden.De eerste en derde rij stellen daar de binnenkomst van de rechter- resp. linkercomponent der (voorradige)particle produsten voor, de2de en 4de rij dun uitgangen naar RHC en LHC.De "Normal Plugging" voor de overdracht van het rechter naar het linker telwerk is dus de verbinding van de eerste met de tweede en van de derde met de vierde rij.Verbindt men in plaats hiervan de tweede en derde rij ,dan worden de linkercomponenten juist in het rechter telwerk gestort.Waarvoor dat dient zullen we later zien.

Hiermee is de schakeling van de overdracht van het rechter naar het linker tekwerk nog niet voltooid.Hiervoor is nog nodig de schakeling (iets verder van "RHC to LHC".U ziet dat die schakelaar op"Add" of "Subtract" kan worden gesloten.In het tweede geval wordt de rechtercomponent negatief in het linkertelwerk gestort,zodat ook aftrekken mogelijk is.Verder moet links daarvan "Multiply cross foot" bij gewone vermenigvuldigingsoperaties op "multiply", bij alle "cross-foot"-operaties op "cross-foot" worden gesteld.

We gaan door met de bespreking van het bovenste gedeelte van het schakelschema.Wilt U alle producten in de "Summary Counter" laten optellen, dan schakelt U van "product Counter" naar "summary counter",Het tal contactgaten van de "summary counter" is kleiner ,omdat U hierbij toch een aantal decimalen zult verwaarlozen.Er is echter rechts bovendien een "Decimal Accumulating Device" ,dat de verwaarloosde posities kan bergen .

De in de "Product Counter" (LHC) of in de "Summary Counter" verkregen uitkomsten kunnen door de machine in bepaalde kolommen van de kaarten geponst d.w.z. de uitkomsten over één kaart,niet het totaal over het heel stel.Voor dit doel moeten de contactgaten van deze counters met de

gewenste gaten van "punch" worden verbonden.Decimalen,die men wil verwaarlozen,verbindt men eenvoudig niet door.Men kan de zelfde uitkomst ook op meer dan één plaats laten ponsen.

De machine kan ook het gebruikelijke afronden uitvoeren.Hiervoor dient een inrichting ,die in de eerste te verwaarlozen decimaal automatisch 5 intelt.Was het getal in deze decimaal 4 of minder dan wordt het laatste behouden cijfer niet beinvloed.Was de verwaarloosde plaats 5 of meer,dan treedt verhoging van de voorafgaande met 1 in.Het afronden kan individueel of groepsgewijze geschieden;naargelang hiervan verbindt men de "Ind" of de "Group" van "1/2 pick up" met dat gat van "1/2 Entry", waar de 5 moet worden ingeteld.

Bij een gewone vermenigvuldiging verbindt men de twee factoren uit de borstels natuurlijk met Multiplier en Multiplicand.Verbindt men nog "product counter" met "punch", dan wordt deze uitkomst geponst.Verbindt men bovendieh "product Counter" met "Summary counter", dan komt de uitkomst ook in de "Summary counter" (de uitkomsten hiervan zijn zichtbaar). Er is nog een andere schakeling voor vermenigvuldiging n.l.die met vaste vermenigvuldiger.Hiervan maakt men gebruik als men de gegevens uit een groot stel kaarten steeds maar met de zelfde factor moet vermenigvuldigen(b.v. rentepercentage,stukprijs,uurloon enz.).Die vaste vermenigvuldiger behoeft dan niet op de afzonderlijke kaarten voor te komen ,maar wordt aan de machine toegediend door een "master card" ,die voorafgaat aan het hele stel.Deze kaart bevat dus de vaste vermenigvuldiger en de machine wordt er van verwittigd, dat uit deze kaart de vermenigvuldiger moet worden overgenomen door een x-ponsing in een bepaalde kolom.Zolang nu kaarten zonder x-ponsing (detail cards) de machine passeren,blijft de vermenigvuldiger ongewijzigd.Zodra echter de aanwezigheid van een x-ponsing het begin van een nieuwe groep aankondigt,wordt de vermenigvuldiger door de nieuwe vervangen,die uit de nieuwe mastercard blijkt. maakt men van vaste vermenigvuldigers gebruik,dan moet het gat van de x-borstel, die de x-ponsing aftast geschakeld worden met het gat C.Verder moet men de schakelaar "Group Multipier" (iets lager) op "on" schakelen ;bij variabele vermenigvuldiger staat hij op "off".Aangezien de werkzaamheid van de x-borstels op "comparing" berust, moet aan elke mastercard een kaart zonder x voorafgaan, dus ook aan de eerste, daar anders de x-ponsing haar uitwerking mist.

Iets lager ziet U nog een schakelaar"Cross-foot-Summary Counter.Die moet "on" staan als in de "Summary Counter" getallen uit de borstels worden geslagen, en "off" als de "Summary Counter voor het accumuleren van de uitkomsten uit de "Product Counter wordt gebruikt.De schakelaar hiernaast "Product Counter to Summary Counter" beslist erover of uitkomsten in de summary ingeteld of afgetrokken worden.

Hiermee zijn de mogelijkheden ven de machine nog maar zeer onvolledig beschreven.Behalve optellen, aftrekken en vermenigvuldigen van twee getallen uit één kaart kan de machine nog zeer veel combinaties uitvoeren.B.v. A.B+C+D , wanneer A en B in multiplier en multiplicand en gelijktijdig C en D in RHC en LHC worden gestort.Of zelfs A.B+C+D+E wanneer bovendien nog E in de Summary Counter wordt (wat niet bij alle typen mogelijk is).Ook B+C+D+E is mogelijk.Hiervoor stelt men de multiplier A constant =1; dat kan door de schakelaar "Unit Multiplier" beneden op "on" te stellen.Ook enige van de plus-tekens kunnen hier nog in min-teken worden veranderd.B.v. A-(B.C) + D).Dan gaat A in de Summary Counter. De verbinding van Product Counter naar Summary Counter staat op "Substract" B en C gaan in Multiplier en Multiplicand ; Din LHC.Nogal lastig is de schakeling voor A+B-C . Want de machine trekt af in de richting LHC min RHC (indien beneden "Substract" is geschakeld).Van de summanden A en B kan er nu één b.v. B rechtsreeks uit de borstels in LHC worden gebracht. Door vermenigvuldiging met 1 komt een getal vanuit de multiplicand het in RHC terecht.Om dit nu te veranderen heeft men de reeds vroeger besproken " A+B-C plugging".Die brengt nu de multiplicand juist in het linkstelwerk, waar wij het inderdaad moeten hebben.Die vier rijen gaten die hierbij medewerken, kunnen onder elkaar nog op heel veel andere manieren worden geschakeld en dat geeft zeer vele variatiemogelijkheden, die

ik echter niet kan bespreken.

Er is ook nog een schakeling mogelijk voor progressief optellen en aftrekken..Die berust hierop, dat men van de "Product Counter" terugschakelt naar de Multiplicand en door vermenigvuldiging met 1 dit getal bij de volgende slag weer in RHC brengt.Door schakeling van RHC en LHC met de borstels kan men bij elke slag nieuwe summanden uit de kaarten daarbij brengen.

De machine bevat zeer vele mogelijkheden voor controle (checking). Hiervoor kan b.v. de Summary Counter dienst doen;dan worden zekere groeptotalen met elkaar vergeleken.Door een schakelaar kunnen de rechter en linker telwerken met elkaar worden verwisseld en alle operaties kunnen nu worden herhaald.Uit een afwijking in de summary-totalen kan dan een fout blijken.Ook uit het feit ,dat de machine bij het constateren van afwijkende ponsing stopt.De snelheid van de Multiplier is helaas veel kleiner dan die van de andere Höllerith-machines n.l. 1000-1500 kaarten per uur.De machine kan ook met selectoren geleverd worden, die analoog functionneren als bij de Tabulator.

Electric Multiplier Type 602.

Dit is een sterk verbeterde editie van de zoeven beschreven Multiplier. Hij is echter nog niet in Nederland aanwezig.Ik beschik alleen over een vrij oppervlakkige beschrijving zonder schakelschema en kan U derhalve niet veel over de machine vertellen.De belangrijkste verschillen zijn, dat dit nieuwe type ook kan delen;verder,dat er een "storage unit" is bijgekimen, die als laatste instantie voor het ponsen optreedt, en tenslotte dat het shoonmaken van bepaalde telwerken zodanig vervroegd en verlaat kan worden,dat alle mogelijke progressieve operaties mogelijk zijn.Als ik het goed heb kunnen in de machine willekeurig lange sommen van de vorm a b worden gevormd en automatisch geponst.Het vermenigvuldigen van matrices en het berekenen van eigenwaarden zou door deze machines dus met veel grote snelheid kunnen worden uitgevoerd.

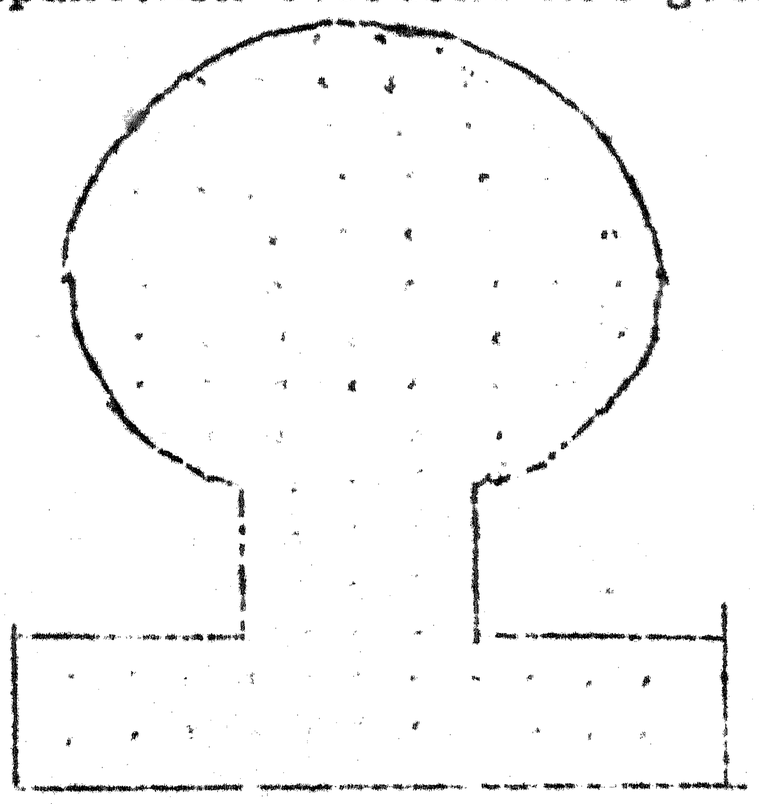
Counting Sorter.

Deze ordener is een bijzonder belangrijke machine, die 20.000 kaarten per uur kan verwerken.Deze machine bezit 13 vakken beantwoordende aan de cijfers 0,...,9,x,y, en "geen ponsing".Hij sorteert een stel kaarten volgens de gegevens in een bepaalde kolom.Men kan hiermee b.v. kaarten op volgorde rangschikken volgens getallen uit zekere kolommen.Moet men b.v. rangschikken volgens een variabel geval ,dat 3 cijfers beslaat (waarbij dus 3 kolommen),dan begint men met het sorteren naar de eenheden, dan komen de tientallen en tenslotte de honderdtallen.De machine telt ook de gesorteerde kaarten.

Randwaardeopgave voor de potentiaalvergelijking,
opgelost met ponskaartenmachines.

Literatuur: M.Kormes, Numerical solution of the Boundary Problem. Review Scient. Instrum. 14 (1943) 24[-250 .

De opgave luidt: gevraagd de functie u, die voldoet aan $\Delta u=0$ in zeker gebied, en die op de rand van dat gebied voorgeschreven waarden aanneemt (de randwaarden).Deze differentiaalvergelijking wordt vervangen door een differentievergelijking.Een functie u ,die aan $\Delta u=0$ voldoet ,bezit de eigenschap,dat het gemiddelde over een cirkelomtrek gelijk is aan de waarde in het middelpunt.Men overdekt het gebied met een kwadratisch rooster, en zoekt nu een functie ,die in elk inwendig roosterpunt gelijk is aan het gemiddelde van de functiewaarden in de vier buurtpunten en die in elk randpunt een voorgeschreven waarde heeft..Bij voldoend kleine maaswijdte is deze functie een goede een goede approximatie voor de gevraagde potentiaalfunctie.Het zo verkregen stelsel lineaire vergelijkingen vergelijkingen voor de functiewaarden in de roosterpunten wordt door iteratie opgelost.Men begint met een willekeurige nulde approximatie, die de randvoorwaarden vervult.De 1e approximatie wordt berekend door 1. in elk randpunt de waarde onveranderd te laten, 2. in elk inwendig punt het gemiddelde te nemen van de functiewaarden in de vier buurtpunten voor de nulde approximatie.Voortgezet geeft dit een convergent procédé met als limiet de gevraagde oplossing van het stelsel lineaire vergelijkingen.



Uitvoering: men nummert de roosterpunten en wel zo, dat het eerste cijfer van een randpunt een 0 ,van een inwendig punt een 1 is.Er wordt gewerkt met twee verschillende soorten kaarten ; de "functiewaardenkaarten" en de "vergelijkingskaarten" ,die we aanduiden met F_n resp.V_n ; ($n = 0,1,\ldots$) ;n slaat op het iteratienummer.De kolommen van de n kaarten zijn verdeeld over zekere groepen,die wij a,b,... zullen noemen. Elke groep moet voldoende breed zijn.

Verdeling van F_n

a	b	c	d	e
0	n	puntnummer	functiewaarde	¼functiewaarde

Verdeling van V_n

a	b	c	d	e
1	n	centr. puntnummer	buurtpunt-nummer	¼functiewaarde in buurtpunt

Door de 0 resp. 1 in groep a worden beide soorten kaarten onderscheiden.In b staat het iteratienummer.Men begint met kaarten F_0 te maken op grond van een lijst van aangenomen waarden: in e staat dus de functiewaarde van het punt, dat in d is aangegeven.Groep f wordt de multiplier geponst (constante vermenigvuldiger 0,25).De kaarten worden met de hand geponst in de groepen c en d volgens een manuscript,waarin dus alle inwendige punten voorkomen (groep c) vergezeld steeds van de vier bijbehorende buurtpunten (groep d); er zijn dus vier keer zoveel kaarten als er inwendige punten zijn.

De kaarten F_0 worden gesorteerd volgens het eerste cijfer van Die met 0 (randpunten) worden in kolom a,d,e even vaak geduplicee als er iteraties zijn (b.v. 20).Elk stel wordt van een nummer (in

voorzien.Deze kaarten worden in het vervolg voor de randwaarden gebruikt.De kaarten V_o worden verveelvoudigd volgens de groepen a,c,d en van een iteratienummer (n) voorzien in b .

F_o en V_o worden op elkaar gelegd (F_o boven) en gesorteerd groep d .Dan liggen dus de kaarten met de zelfde gegevens in d bij elkaar, en wel de F_o-kaart eerst en de vier V_o-kaarten daaronder. Het gegeven uit f van F_o wordt nu gereproduceerd in groep e van V_o. Dan worden de F_o-kaarten verwijderd door sorteren volgens e . De V_o-kaarten worden nu gesorteerd volgens groep c .In de Tabulator wordt van elk stel van vier kaarten met de zelfde c de som opgemaakt van groep e (c is dus de criteriumgroep van de totaalslag); de uitkomsten worden door de Summary Punch geponst.Precieser:het gegeven in c wordt in kolom 1 overgenomen (first card control): het totaal van vier kaarten gaat in kolom 6; in kolom 1 wordt 0 geponst ; in kolom b (als nieuw iteratienummer) 1. Aan de aldus ontstaande kaarten worden de randpuntkaarten F_1 toegevoegd en dat geeft het hele stel F_1 (Groepen a-g groep f wordt weer in de multiplier verkregen, en zo gaan wij door tot de functiewaarden door iteratie niet merkbaar meer veranderen.

Duur per iteratie (bij een rooster van 145 punten en 6 decimalen) een half uur.

Waarschijnlijkheidsrekening.

Een urne bevat N balletjes ,waaronder pN witte en qN zwarte p+q=1. Het trekken van een balletje vatten we op als een meting van een grootheid $[\alpha]$ .Een wit balletje tekenen we aan met het meetresultaat 1 ,een zwart balletje met 0 .Het gemiddelde $[\alpha]$ over een reeks metingen (d.w.z. trekkingen met terugleggïng) is dus de relatieve frekwentie van een wit balletje.Uit de ervaring weet men ,dat die over het algemeen tot p nadert.Men stelt daarom : ware waarde $[\alpha]$ =p .Men noemt dit ook de kans op een wit balletje.(Analoge defenities geeft men bij een urne met meer dan twee soorten balletjes.) Weet men van de samenstelling niets af ,dan veronderstelt men het percentage witte balletjes ,overeenkomstig de ware waarde $[\alpha]$.

Van $[\alpha]$ kunnen we ook de mid. afw., σ , bepalen.Een wit balletje (meting=1) vertoont de kwadratische afwijking $(1-p)^2$,een zwart balletje p^2.We denken ons deze getallen a.h.w. op de balletjes genoteerd en vormen nu het gemiddelde van deze nieuwe grootheid.Volgens het bovenstaande beginsel is dat

$$1/N\ (pNq^2 + qNp^2) = pq \ . \quad \text{Dus } \sigma = \sqrt{pq} \ .$$

Uit de theorie der metingen weten wij,dat de gemiddelden zich bij het optellen van grootheden en bij het vermenigvuldigen met exacte getallen lineair gedragen.De mid.afw. daarentegen worden bij het optellen van grootheden volgens Pythagoras opgeteld.Stellen $[\alpha]$ en $[\beta]$ trekkingen uit een urne voor, dan beantwoordt aan $[\alpha]+[\beta]$ de combinatie ven deze trekkingen tot paren.De paren balletjes uit de twee urnen zijn a.h.w. een nieuw soort balletjes.We noteren bij twee witte balletjes 2,bij één witte en één zwarte 1,en bij twee zwarte 0 .Speciaal kunnen we beschouwen

$$\frac{1}{n}\left([\alpha]+[\alpha]+\cdots+[\alpha]\right) \qquad \text{(n termen)}.$$

Dan meten wij dus over een reeks van n trekkingen.

$$\text{mid.afw.}\left([\alpha]+\cdots+[\alpha]\right) = \sqrt{npq}$$
$$\text{mid.afw.}\,1/n\left([\alpha]+\cdots[\alpha]\right) = \sqrt{pq/n}$$

De laatste formule is bijzonder belangrijk voor de toepassing.Empirisch geeft zij ons een middel om te schatten. hoe sterk de over een reeks van n trekkingen berekende frekwentie gemiddeld van de ware waarde p (de kans) kan verschillen.Zij geeft omgekeerd ook de mogelijkheid om va uit een eindige observatiereeks een conclusie op de ware kans te trek.

Voorbeeld: het dobbelen opgevat als trekken uit een urne.Elk ge 1...6 heeft de kans 1/6.Bij een serie van 20.000 keer dobbelen is de mid. afw. $\sqrt{1/6 \cdot 5/6 \cdot 20.000} \sim 52$; die op het gemiddelde 1/6 1s 0. Staat de uitkomst in een redelijke verhouding hiertoe, zoals b.v. in

1	3320	=3333 1/3 - 13 1/3
2	3361	,, + 27 2/3
3	3298	,, - 35 1/3
4	3259	,, - 74 1/3
5	3362	,, + 28 2/3
6	3400	,, + 66 2/3

waar de mid.afw. (van 3333 1/3) $= \sqrt{\frac{(13\ 1/3)^2 + \ldots}{6}}$ = 46, dan kunnen we van een eerlijke dobbelsteen spreken.Een zwak punt van deze en dergelijke redeneringen is,dat we de ware waarde p niet kennen;mocht deze echter een beetje van 1/6 verschillen,dan zou dit nog van geen invloed op de uitdrukking $\sqrt{npq}$ zijn.

Het model van de urne wordt nu op vele collectieve verschijnselen toegepast.In alle dergelijke gevallen hebben we een groot aantal numerieke gegevens ,b.v.:

(1). frequentie van wit balletje in de i-de trekking uit een urne.
(2). frequentie ven de 4 bij de i-de reeks van n keer dobbelen.
(3). frequentie van de letter a op bladzijde i van zeker boek.
(4) frequentie van de jongensgeboorten (op de geboorten zonder meer) in het jaar i .
(5). frequentie van overlijdensgevallen (op het geheel der bevolking) in het jaar i .
(6). frequentie van de huwelijken in het jaar i.
(7). frequentie ven het aantal recidivisten (op het aantal misdadigers) in het jaar i .
(8). frequentie van linkshandigheid in een bevolkingsgroep.
(9). de i-de meting van een bepaalde hoek.
(10).de lichaamslengte van de i-de mens.
(11).de temperatuur van een gas op het ogenblik i .
(12).het aantal impulsen genoteerd door een G iger-teller in het i-de tijdsinterval.
(13).aardappeloogst (in ton) in het jaar i in Nederland.

Ons urnemodel past zonder meer op (1) en (2) (d.w.z. als het er niet op past ,dan keuren we de urne of dobbelsteen af); de $\sqrt{\frac{pq}{n}}$ -wet zal hier gelden.Bij (3) kan enige onzekerheid heersen; om bep. redenen kan op zekere bladzijden de letter a vaker dan normaal optreden (denkt U aan het eerste leesboekje met de aap op de eerste bladzijde).Over het algemeen zal het echter wel loslopen.

Om geval (4) in het urnen-model te kunnen onderbrengen,moeten we veronderstellen, dat een jongens- resp. meisjesgeboorte een kansverschijnsel is ,zoals een wit of zwart balletje.Men kan dit ook theoretisch (uit het bevruchtingsproces) plausibel maken; men kan het ook aan statistische voorbeelden nagaan.Het blijkt dan vrij goed te kloppen.

Voorbeeld.

Sexe-verhoudingen bij levendgeborenen in Denemarken.

jaar	aantal geboorten	aantal mannelijk	%
1911	73933	37798	51,12
1912	74659	38321	51,33
1913	72475	36994	51,04
1914	73294	37509	51,18
1915	70192	35982	51,26
1916	71559	36730	51,33
1917	70306	35926	51,10
1918	72505	37245	51,37
1919	68722	35436	51,56
1920	78230	39962	51,08
	725875	371903	51,24

Bij geval (5) zullen we al meer aarzelen, om ons van het urnen-model te bedienen, en wel al om theoretische redenen.Sterven is niet zo maar een trekken van een (zwart) balletje.Voor bepaalde doodsoorzaken zouden we dit schema wel kunnen aanvaarden (b.v dood door bliksem; gewelddadige dood), maar over het algemeen zou men veeleer aan een heel stel urnen denken (doodsoorzaken),die samen de hele overlijdensstatistiek opleveren;bovendien zou men in de bevolking voor sommige doodsoorzaken vrij scherpe grenzen kunnen trekken t.a.v. hun sterftekans.

In geval (6) kan men aanmerkingen van andere aard maken.De huwelijkskans zal van jaar tot jaar sterk varieren (economische omstandigheden).In het vorige voorbeeld hadden we voor elk jaar (dus elke $\alpha(.)$een aantal urnen ,waarvan de samenstelling echter niet sterk van i afhing; hier varieert de samenstelling van de urne (kans op huwelijk) juist van jaar tot jaar.

Bekijk voor geval (7) uit dit oogpunt de vogende recidive-statistiek.

Recidive-statistiek.

Jaar	Misdadiger-beginneling.	Recidiveinhet zelfde jaar.	per 100
1897	1539	131	8,51
1898	1488	109	7,33
1899	1438	92	6,40
1900	1514	114	7,53
1901	1427	92	6,45
1902	1376	90	6,54
1903	1403	91	6,49
1904	1411	104	7,37

(stat. over de jaren 1905-1915 op p.4)

Jaar	misdadiger-beginneling.	recidive in het zelfde jaar.	per 100
1905	1672	129	7,72
1906	1422	74	5,20
1907	1487	81	5,45
1908	1455	76	5,19
1909	1470	98	6.67
1910	1654	98	5.93
1911	1682	104	6,18
1912	1532	86	5,61
1913	1729	88	5,09
1914	1619	112	6,92
1915	1885	106	5.62
	29213	1875	6,42

Geval (8) :Welke conclusies trekt U uit de volgende statistiek van optische en manuale dexteriteit enz.

Rechter oog beter.	Beide gelijk.	Linker oog beter.	Totaal.
1108 (22,82%)	2711 (54,79%)	1129 (22,39%)	4948 gevallen (100%)

Rechterhand sterker.	Beide gelijk.	Linkerhand sterker.	Totaal.
3185 (64,37%)	333 (6,73%)	1430 (28,90%)	4948 gevallen (100%)

Geval (9): de gegevens zijn hier van een geheel.ander type dan in 1-8.De ν zijn geen frequenties doch absolute getallen.Bovendien,wat belangrijker is: in 1-8 waren de ν "makroskopische"gegevens,die op een bekende manier uit "mikroskopische"waren samengesteld (een trekkingsreeks uit afzonderlijke trekkingen,een geboortestatistiek per jaar uit de afzonderlijke geboorten enz.)Hier zijn de afzonderlijke metingen ν enkelvoudige gegevens.Toch weet U,dat juist hierop de kansrekening met veel succes wordt toegepast.Het urne-model ziet er hier als volgt uit:Er is een objectieve ware waarde van de te meten hoek.Elke meting bestaat uit een groot aantal (laten we zeggen n)elementaire processen, waarbij telkens een elementaire fout δ naar boven (wit balletje) of naar beneden (zwart balletje) kan worden gemaakt, en wel volgens de kanswetten van kruis en munt of het urne-schema.De $\pm \delta$'s van die afzonderlijke elementaire processen bij één meting, geven,bij elkaar opgeteld,de fout van meting, d.w.z. het verschil t.o.v. de ware waarde,De elementaire(δ) is δ^2, dus die van de werkelijke meting $n\delta^2$,de mid.afw. dus ?

en dat moet aan de geobserveerde mid. afw. gelijk zijn.Maar $\sum$ en n zijn fictieve grootheden,alleen $\sum\sqrt{n}$ heeft een betekenis.Het urne-schema levert bij deze beschouwingen niets nieuws op (wel later bij de foutenwet).

Geval (10) is van het zelfde type:men schept ook hier een min of meer denkbeeldige "mikro"-verdeling.Men stelt zich voor,dat de lichaamslengte door een groot aantal factoren wordt bepaald, die aan de mens een groeiatoompje verstrekken of onttrekken.

In geval (11) is het mikro-model,zoals U weet dat van de kinetische gastheorie.De n en $\sum$ hebben hier een reele betekenis (vergeleken bij 9. en 10. dank zij onze betere wetenschap van de mikro-mechanica) ,n is het getal van Loschmidt , $\sum$ een energie.In (11) pleegt men het urnenschema door een mechanisch omroermechanisme (botsing van atomen) te rechtvaardigen, terwijl men bij (12) a.h.w. een absoluut urnen-schema heeft;de microprocessen zijn zuiver toevallog.

Geval (13) heb ik er nog bijgenomen om U te laten zien,hoe ingewikkeld de situatie in practische gevallen kan zijn.Zo'n aardappeloogst is uit oogsten van de afzonderlijke boeren samengesteld, maar aan deze micr-splitsing hebben we hier niets.De oogsten varieren (onder normale omstandigheden) tengevolge van klimatische invloeden.Die zullen zich ongeveer als de fouten in de foutentheorie uiten.Hierbij komen variaties door de vooruitgang van de techniek,die ongeveer werken als een verandering van de samenstelling van de urnen.Tenslotte nog invloeden van elke oogst op de volgende,die nog moeilijker te overzien zijn.

We geven nog twee voorbeelden.

Statistiek over het aantal jongens onder echtelijk geboren kinderen,verdeeld volgens "geboortenummer" s (d.w.z. s-de kind v/h gezin)

s	aantal geborenen	hiervan jongens	aantal jongens per 10.000
1	40967	21057	5140
2	30911	15964	5165
3	18313	9476	5174
4-6	22875	11856	5183
7	9046	4646	5136
onbekend	310	156	--

Valt hieruit iets op te maken met betrekking tot de invloed van het geboortenummer op het geslacht?

Voorbeeld: in 197.591 gezinnen met uitsluitend jongens was het volgende kind in 102.812 gevallen een jongen.In 180.620 gezinnen met uitsluitend meisjes was het volgende kind in 91.798 gevallen een jongen .Wat valt hieruit op te maken?

We willen nog de wiskundige uitdrukking behandelen van zekere in verschillende gevallen besproken wijzigingen van het urnen-model. We hadden daar twee mogelijkheden:

a) Bij elke α_i werken twee of meer urnen (in een vaste verhouding b.v. 1:1) mee. Hun samenstelling hangt niet van i af,

b) Elke α_i wordt uit één urne verkregen, maar de samenstelling hangt van i af (ofwel: voor elke i heeft men met een andere urne te maken). Men heeft b.v. om de beurt twee verschillende urnes.

We maken de gevolgen duidelijk aan twee extreme gevallen.

a) Twee urnen, één met uitsluitend witte, de ander met uitsluitend zwarte balletjes; α_i hangt dan in het geheel niet van i af. De mid.afw. is 0, dus "ondernormaal".

b) De zelfde veronderstelling; de α_i worden om de beurt uit deze urnes verkregen. De mid. afw. is practisch onafhankelijk van i, en wel positief ($\sim \frac{1}{4}\sqrt{2}$); dus "bovennormaal".

Dat geeft een aanwijzing, van welk urnenmodel men zich bij bepaalde statistische gegevens zou moeten bedienen. Men kan dit generaliseren:

a) Men heeft eigenlijk met twee grootheden (frekwenties in de twee urnen te maken: $\boxed{B_1}$ en $\boxed{B_2}$ met gemiddelden over n trekkingen p_1 en p_2 en de $(\text{mid.afw.})^2$ op het gemiddelde $p_1(1-p_1)/n$ en $p_2(1-p_2)/n$. $\frac{1}{2}\left(\boxed{B_1} + \boxed{B_2} \right)$ met het gemiddelde $(p_1+p_2)/2$ heeft als $(\text{mid.afw.})^2$ op het gemiddelde (volgens Pythagoras):

$$\frac{p_1(1-p_1)+p_2(1-p_2)}{4n}$$

wat dus kleiner is dan

$$\frac{\frac{p_1+p_2}{2}\left(1-\frac{p_1+p_2}{2}\right)}{2n}$$

welke laatste men op grond van de $\sqrt{pq/n}$ -wet (met in casu 2n metingen) zou verwachten. Dus "ondernormale" spreiding.

b) In de ene urn is de kans op een wit balletje p_1, in de andere p_2; de $(\text{mid.afw.})^2$ is $np_1(1-p_1)$ resp. $np_2(1-p_2)$. Het gemiddelde van het geheel is $\frac{1}{2}(p_1+p_2)$. T.o.v. dit getal moet de mid.afw. van het geheel worden berekend. Hierdoor komt er 2n keer $\left(\frac{p_2-p_1}{2}\right)^2$ bij. Dus

$$(\text{mid.afw.})^2 = np_1(1-p_1) + np_2(1-p_2) + 2n.\left(\frac{p_2-p_1}{2}\right)^2$$

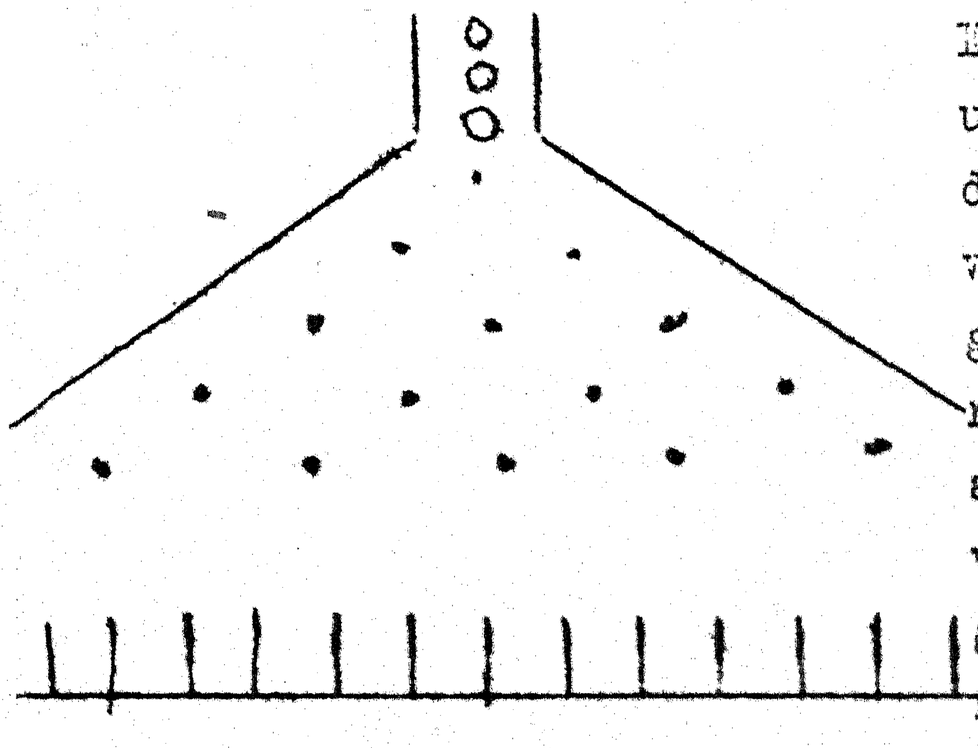
en dat is nu net groter dan

$$2n\,\frac{p_1+p_2}{2}\left(1-\frac{p_1+p_2}{2}\right)$$

wat uit de $\sqrt{npq}$ -wet zou volgen. Dus "bovennormale" spreiding.

Bovennormale spreiding is het meest voorkomend. Ondernormale komt b.

voor bij de sexe-verhouding-misschien doordat de kans op een jongensgeboorte niet bij de hele bevolking de zelfde is.



Een bekende mechanische realisering van het urne-model is het bord van Galton.Zie figuur. de punten stellen pinnen voor;de balletjes worden door de pinnen naar rechts of links gekaatst en komen tenslotte in de vakken beneden terecht.Denkt U in verband hiermee voorlopig al aan geval (10).Het balletje stelt een mens voor;die krijgt er bij elk alternatief een grociatoompje bij of verliest er een(ketsing naar rechts of links).Als δ de waarde van het grociatoompje is,die overeenkomt met de halve afstand van twee naburige spijkers, en en n is het aantal spijkerrijen, dan kan men uit het vakje waarin het balletje (de mens) is terecht gekomen, zijn lengte aflezen.In één vak liggen dus alle mensen*),bij de gemiddelde lengte vinden we een maximum;naar de zijkanten neemt het aantal per vak geleidelijkaf.

Dit zelfde doet zich voor bij (9),(11) en (12).Maar ook voor het gewone urne-trekken is dat een model.Het vallende balletje trekt bij elke ketsen a.h.w. uit de urne een lot waar "rechts" of "links" op staat.Is het balletje tenslotte bij de abcis +x (gerekend vanaf het midden) beneden terecht gekomen,dan betekent dit, dat het x/δ keer vaker het woord "rechts" dan het woord "links" uit de urne heeft getrokken .Daar er n keer getrokken is,kwam "rechts" $\frac{1}{2}(n+\frac{x}{\delta})$ maal voor.

Nu is de kans om bij n trekkingen $t=\frac{1}{2}(n+\frac{x}{\delta})$ keer"rechts" te trekken (bij gelijke waarschijnlijkheid van "rechts" en "links")
$\binom{n}{t}$ op 2^n,dus uitgedrukt in de abcis x waar het balletje terecht komt

$$2^{-n}\binom{n}{\frac{1}{2}(n+\frac{x}{\delta})}$$

Wenscht we een bepaalde mid.afw. σ te verkrijgen,dan kiezen we de halve pinnenafstand $\delta=\sigma/\sqrt{n}$ dus wordt de kans op een abcis x :

$$2^{-n}\cdot\binom{n}{\frac{1}{2}(n+\quad)}$$

Voor grote n is deze uitdrukking moeilijk te berekenen,maar hij kan dan worden vervangen door

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot 2\delta$$

Dat geeft dus de bekende normaalkromme van Moivre-Laplace-Gauss.

---

*) bedoeld wordt:
alle mensen van dezelfde lengte (aangegeven door v...

De kans op eeen abcis x met $a \leq x \leq b$ is dus:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2\sigma^2} \cdot dx$$

Voor deze integraal heeft men tafels en hieruit blijkt b.v.

kans op een	$\lvert x \rvert \leq 0{,}674495 . \sigma$	is	50 %	, overschrijdingskans	50 %
,, ,, ,,	$\lvert x \rvert \leq 1 . \sigma$	,,	68,269 %	,,	31,731 %
,, ,, ,,	$\lvert x \rvert \leq 2 . \sigma$	,,	95,450%	,,	4,550%
,, ,, ,,	$\lvert x \rvert \leq 3 . \sigma$	,,	99,730%	,,	0,270%
,, ,, ,,	$\lvert x \rvert \leq 4 . \sigma$	,,	99,994%	,,	0,006%
,, ,, ,,	$\lvert x \rvert \leq 4{,}42 . \sigma$	,,	99,999%	,,	0,001%

$0{,}67449 . \sigma$ noemt men ook de waarschijnlijke afwijking (of fout), men geeft gemiddelden van metingen dan ook vaak aan in de vorm gem. $\pm 0{,}6744 . \sigma$ De kans ,dat de ware waarde binnen deze grenzen ligt, is dus even groot als dat hij er buitem ligt.De voor σ, 2σ enz. aangegeven percentages zijn soms belangrijker.Naargelang men de vereiste veiligheidsmarge zal men zich van een hunner bedienen.B.v. werken verzekeringsmaatschappijen met 3σ .N.B. Maak hiervan gebruik ,om de antwoorden op de voorafgaande vragen iets nauwkeuriger te geven!

We behandelen het proefschrift van H.Bongers:"The History and Principles of Vocabulary Control".(Utrecht 1947).

Onder de didactici der vreemde talen is er een streven om het vocabulaire der schoolboeken te rationaliseren.Zij gaan uit van het feit,dat de meeste woorden van een taal zeer zeldzaamzijn.De grootste statistiek in deze richting (echter niet van didactische,maar stenografische doeleinden) in in 1896 door F.W.Karding voor het Duits opgemaakt (uit een materiaal van 11.000.000 woorden).Uit alle dergelijke statistieken blijkt,dat (wanneer men alle woorden volgens hun frequentie rangschikt) het 1e duizendtal een frequentie van 85%,het 2e van 7% en het 3e van 3% heeft.De rest (voor het Engels 47.000 woorden) heeft dus een frequentie van 5%.

De paedagogische bedoeling is,de voor leerlingen der vreemde taal bestemde literatuur zodanig te zuiveren,dat er alleen de meest voorkomende woorden (bv.de eerste 3.000) in voorkomen;de "outsiders" (de woorden vanaf het 3001ste)worden min of meer overbodig geacht,omdat hun frequentie toch maar 2½ - 5% is.

De auteur van bovengenoemd proefschrift heeft het gehele complex van "Vocabulary Control" behandeld.(bv.ook de kwestie,wat onder een woord moet worden verstaan).Als hoofdschotel heeft hij zelf een lijst van de eerste 3000 woorden in het Engels opgemaakt (de "K.L.M."lijst) en met dergelijke lijsten van andere auteurs vergeleken (Thorndike,Palmer, Faucett-Maki) en verder met een 1000-woordenlijst van Palmer en een lijst van 2000 woorden van Carnegie.Zijncontrôlemateriaal bestond uit een steekproef van een tiental geschriften.De auteur kwam tot de conclusie,dat zijn lijst beter is dan alle andere lijsten.Hij heeft hierbij geen mathematische methoden toegepast.Hier volgt nu het centrale hoofdstuk van zijn werk (met enkele bekortingen).

Hoofdstuk XII.

Vergelijkende analyse.

Om de waarde van de verschillende vocabulaires te vergelijken,analiseerden we 10 verschillende teksten,ieder van 1000 woorden,om na te gaan welk percentage van elke tekst voorkwam in de onderscheiden lijsten.

De geanaliseerde teksten waren de volgende:

The Times	Special Printing Number,November 29,1929: "The London Daily Press since 1850"
Grenfell	"A Labrador Doctor"
Pearl Buck	"The good earth" and "Exile".
James Hilton	"Good-bye,Mr.Chips."
Emily Brontë	"Wuthering Heights."
Warwick Deeping	"Old Pybus".
Bernard Shaw	"The intelligent woman's guide to socialism,etc."
Charles Dickens	"A tale of two cities"
Anna Sewell	"Black Beauty".
Eleanor Doorly	"The radium woman".A Youth Edition of the Life of Madame Curie.

De resultaten zijn in de volgende tabellen weergegeven.
I betekent het percentage gelegen in de 1000 eerste woorden van de betreffende lijst.Evenzo II voor het tweede en III voor het derde duizendtal.

I.The Times."The London Daily Press since 1850".

	I	II	III	I+II	I+II+III	Outsiders
Thorndike	81	11.2	2	92.2	94.2	5.8
Palmer	86.3	7	2.5	93.3	95.8	4.2
Faucett-Maki	84.2	9.2	1.5	93.4	94.9	5.1
Bongers,"K.L.M."	81.3	11.5	3.2	92.8	96	4
Palmer,1.000-Wd.Eng.	80.2	----	----	----	----	----
Carnegie Report	----	----	----	90.5	----	----

II.Grenfell."A Labrador Doctor."

	I	II	III	I+II	I+II+III	Outsiders
Thorndike	86.5	5.7	3.7	92.2	95.9	4.1
Palmer	86.6	5.6	3.6	92.2	95.8	4.2
Faucett-Maki	86.7	5.3	3.2	92	95.2	4.8
Bongers,"K.L.M."	86.3	6.5	3.6	92.8	96.4	3.6
Palmer,1.000-Wd.Eng.	86	----	----	----	----	----
Carnegie Report	----	----	----	91.8	----	----

III.Pearl Buck."The Good Earth" and "Exile"

	I	II	III	I+II	I+II+III	Outsiders
Thorndike	90.3	3.6	2.7	93.9	96.6	3.4
Palmer	89	5.2	2.1	94.2	96.3	3.7
Faucett-Maki	88.7	5.2	2.6	93.9	96.5	3.5
Bongers,"K.L.M."	89.7	5	2.1	94.7	96.8	3.2
Palmer,1.000-Wd.Eng.	89.1	----	----	----	----	----
Carnegie Report	----	----	----	94.5	----	----

IV.James Hilton."Good-bye,Mr.Chips."

	I	II	III	I+II	I+II+III	Outsiders
Thorndike	87.8	6.3	1.5	94.1	95.6	4.4
Palmer	88.1	6.3	2.1	94.4	96.5	3.5
Faucett-Maki	88	5.6	2.2	93.6	95.8	4.2
Bongers,"K.L.M."	88.5	5.2	3.2	93.7	96.9	3.1
Palmer,1.000-Wd.Eng.	87.7	----	----	----	----	----
Carnegie Report	----	----	----	93.4	----	----

V. Emily Brontë."Wuthering Heights".

	I	II	III	I+II	I+II+III	Outsiders
Thorndike	91	4	1.8	95	96.8	3.2
Palmer	91.4	2.6	2.8	94	96.8	3.2
Faucett-Maki	91.4	3.2	2	94.6	96.6	3.4
Bongers,"K.L.M."	92.1	3.6	1.7	95.7	97.4	2.6
Palmer,1.000-Wd.Eng.	91.2	----	----	----	----	----
Carnegie Report	----	----	----	93.8	----	----

VI. Warwick Deeping."Old Pybus".

	I	II	III	I+II	I+II+III	Outsiders
Thorndike	91	3.6	2.2	94.6	96.8	3.2
Palmer	90.8	4.2	2.2	95	97.2	2.8
Faucett-Maki	90.6	4.4	1.6	95	96.6	3.4
Bongers,"K.L.M."	91.2	4.2	2	95.4	97.4	2.6
Palmer,1.000-Wd.Eng.	90.8	----	----	----	----	----
Carnegie Report	----	----	----	94.6	----	----

VII. Shaw."The Intelligent Woman's Guide to Socialism"

	I	II	III	I+II	I+II+III	Outsiders
Thorndike	89.5	5.7	2.2	95.2	97.4	2.6
Palmer	91.8	4.5	1.6	96.3	97.9	2.1
Faucett-Maki	91.5	4.7	1.2	96.2	97.4	2.6
Bongers,"K.L.M."	90.3	4.2	3	94.5	97.5	2.5
Palmer,1.000-Wd.Eng.	88.8	----	----	----	----	----
Carnegie Report	----	----	----	94.8	----	----

VIII. Dickens. "A Tale of Two Cities."

	I	II	III	I+II	I+II+III	Outsiders
Thorndike	90.2	5.1	2.6	95.3	97.9	2.1
Palmer	90.7	5.5	1.8	96.2	98	2
Faucett-Maki	90.2	6.5	1.5	96.7	98.2	1.8
Bongers,"K.L.M."	91	5.4	2.2	96.4	98.6	1.4
Palmer,1.000-Wd.Eng.	88.2	----	----	----	----	----
Carnegie Report	----	----	----	94	----	----

IX.Anna Sewell. "Black Beauty."

	I	II	III	I+II	I+II+III	Outsiders
Thorndike	95.1	2	1.6	97.1	98.7	1.3
Palmer	94.6	2.3	1.8	96.9	98.7	1.3
Faucett-Maki	94.7	1.8	2	96.5	98.5	1.5
Bongers,"K.L.M."	95.1	2.4	1.3	97.5	98.8	1.2
Palmer,1.000-Wd.Eng.	94.8	----	----	----	----	----
Carnegie Report	----	----	----	97	----	----

X.Eleanor Doorly. "The Radium Woman."

	I	II	III	I+II	I+II+III	Outsiders
Thorndike	88.4	5.7	4.4	94.1	98.5	1.5
Palmer	87.7	8.1	3,4	95.8	99.2	0.8
Faucett-Maki	87.9	6.6	3.5	94.5	98	2
Bongers,"K.L.M."	89.1	7.8	2.1	96.9	99	1
Palmer,1.000-Wd.Eng.	88.3	----	----	----	----	----
Carnegie Report	----	----	----	95.3	----	----

Voor we uit deze analysen conclusies trekken rangschikken we het materiaal eerst zo,dat de resultaten voor elke vocabulaire apart direct zijn af te lezen.

Palmer (I.R.L.I.)
(Instead of I,II and III,the letters A,B and C are used here).

	A	B	C	A+B	A+B+C	Outsiders
1.The Times,THE L.DAILY PRESS.	86.3	7	2.5	93.3	95.8	4.2
2.Grenfell,A LABR.DR.	86.6	5.6	3.6	92.2	95.8	4.2
3.Buck, GOOD EARTH/EXILE.	89	5.2	2.1	94.2	96.3	3.7
4.Hilton,GOOD-BYE Mr.CH.	88.1	6.3	2.1	94.4	96.5	3.5
5.Brontë,WUTHERING HEIGHTS.	91.4	2.6	2.8	94	96.8	3.2
6.Deeping,OLD PYBUS.	90.8	4.2	2.2	95	97.2	2.8
7.Shaw, INT.WOMAN's GUIDE.	91.8	4.5	1.6	96.3	97.9	2.1
8.Dickens,TALE OF 2 CIT.	90.7	5.5	1.8	96.2	98	2
9.Sewell,BLACK BEAUTY.	94.6	2.3	1.8	96.9	98.7	1.3
10.Doorly, THE RADIUM WOMAN.	87.7	8.1	3.4	95.8	99.2	0.8
	897	51.3	23.9	948.3	972.2	27.8

THORNDIKE.
(Instead of I,II and III,the letters P,Q and R are used here).

	P	Q	R	P+Q	P+Q+R.	Outsiders
1.The Times,THE L.DAILY PRESS.	81	11.2	2	92.2	94.2	5.8
2.Grenfell,A LABR.DR.	86.5	5.7	3.7	92.2	95.9	4.1
3.Buck,GOOD EARTH/EXILE.	90.3	3.6	2.7	93.9	96.6	3.4
4.Hilton,GOOD-BYE Mr.CH.	87.8	6.3	1.5	94.1	95.6	4.4
5.Brontë,WUTHERING HEIGHTS.	91	4	1.8	95	96.8	3.2
6.Deeping,OLD PYBUS.	91	3.6	2.2	94.6	96.8	3.2
7.Shaw,INT.WOMAN'S GUIDE.	89.5	5.7	2.2	95.2	97.4	2.6
8.Dickens,TALE OF 2 CIT.	90.2	5.1	2.6	95.3	97.9	2.1
9.Sewell,BLACK BEAUTY.	95.1	2	1.6	97.1	98.7	1.3
10.Doorly,THE RADIUM WOMAN.	88.4	5.7	4.4	94.1	98.5	1.5
	890.8	52.9	24.7	943.7	968.4	31.6

FAUCETT-LAKI
(Instead of I,II and III,the letters X,Y and Z are used here).

	X	Y	Z	X+Y	X+Y+Z	Outsiders
1.The Times,THE L.DAILY PRESS.	84.2	9.2	1.5	93.4	94.9	5.1
2.Grenfell,A LABR.DR.	86.7	5.3	3.2	92	95.2	4.8
3.Buck,GOOD EARTH/EXILE.	88.7	5.2	2.6	93.9	96.5	3.5
4.Hilton,GOOD-BYE Mr.CH.	88	5.6	2.2	93.6	95.8	4.2
5.Brontë,WUTHERING HEIGHTS.	91.4	3.2	2	94.6	96.6	3.4
6.Deeping,OLD PYBUS.	90.6	4.4	1.6	95	96.6	3.4
7.Shaw,INT.WOMAN'S GUIDE.	91.5	4.7	1.2	96.2	97.4	2.6
8.Dickens,TALE OF 2 CIT.	90.2	6.5	1.5	96.7	98.2	1.8
9.Sewell,BLACK BEAUTY.	94.7	1.8	2	96	98.5	1.5
10.Doorly,THE RADIUM WOMAN.	87.9	6.6	3.5	94.5	98	2
	893.9	52.5	21.3	946.4	967.7	32.3

BONGERS." .L.M."
(Instead of I,II and III,the letters K,L and M are used here).

	K	L	M	K+L	K+L+M	Outsiders
1.The Times,THE L.DAILY PRESS.	81.3	11.5	3.2	92.8	96	4
2.Grenfell,A LABR.DR.	86.3	6.5	3.6	92.8	96.4	3.6
3.Buck,GOOD EARTH/EXILE.	89.7	5	2.1	94.7	96.8	3.2
4.Hilton, GOOD-BYE,Mr.CH.	88.5	5.2	3.2	93.7	96.9	3.1
5.Brontë,WUTHERING.HEIGHTS.	92.1	3.6	1.7	95.7	97.4	2.6
6.Deeping,OLD PYBUS.	91.2	4.2	2	95.4	97.4	2.6
7.Shaw,INT.WOMAN'S GUIDE.	90.3	4.2	3	94.5	97.5	2.5
8.Dickens,TALE OF 2 CIT.	91	5.4	2.2	96.4	98.6	1.4
9.Sewell, BLACK BEAUTY.	95.1	2.4	1.3	97.5	98.8	1.2
10.Doorly, THE RADIUM WOMAN.	89.1	7.8	2.1	96.9	99	1
	894.6	55.8	24.4	950.4	974.8	25.2

	Palmer-Hornby 1,000-Wd.Engl.	Carnegie report 2,000 words
1.The Times,THE L.DAILY PRESS.	80.2	90.5
2.Grenfell, A LABR.DR.	86	91.8
3.Buck,GOOD EARTH/EXILE.	89.1	94.5
4.Hilton,GOOD-BYE,Mr.CH.	87.7	93.4
5.Brontë,WUTHERING HEIGHTS.	91.2	93.8
6.Deeping,OLD PYBUS.	90.8	94.6
7.Shaw, INT.WOMAN'S GUIDE.	88.8	94.8
8.Dickens,TALE OF 2 CIT.	88.2	94
9.Sewell, BLACK BEAUTY.	94.8	97
10.Doorly, THE RADIUM WOMAN.	88.3	95.3
	885.1	939.7

We hebben als materiaal verschillende soorten boeken gekozen:Black Beauty" is een kinderboek,evenzo "The Radium Woman";"The good Earth", "Exile;""Old Pybus" en "Good-Bve,Mr.Chips"zijn moderne novellen;"Wuthering Heights" en "A tale of2 cities"zijn klassieken;"The intelligent Woman's Guide to Socialism","A Labrador Doctor" en "The London Daily Press" behandelen een sociaal onderwerp.

De analyse toont duidelijk het karakter van het vocabulaire der verschillende schrijvers. "Black Beauty" en "The Radium woman" vertonen het kleinste aantal outsiders,waaruit blijkt dat zij inderdaad zijn geschreven met woorden waarmee de kinderen vertrouwd zijn.Toch is het percentage van de tekst ingenomen door de eerste tweeduizend woorden veel groter voor "Black Beauty" dan voor "The radium woman".Hieruit volgt,dat het eerste boek het eenvoudigste is.Het is geschreven in woorden die het vaakst worden gebruikt en kunnen worden gelezen door leerlingen op het eind van hun tweede schooljaar."The radium woman" moet volgens onze analyse een jaar later worden gelezen.

Het artikel uit de "Times" heeft het hoogste gemiddelde aan outsiders: het is een tamelijk zwaar stuk proza. "A Labrador Doctor" volgt hier direct op,wat betreft het percentage outsiders. Shaw's "Intelligent Woman's Guide to Socialism" heeft een laag aantal outsiders in alle lijsten: Shaw is er in geslaagd om over zijn onderwerp te schrijven in een taal, die niet wezenlijk verschilt van de taal die hij in zijn toneelspelen gebruikte.

Uit onze analyse kunnen we de volgende conclusies trekken:
1. De eerste 1000 woorden van de "K.L.M."-lijst omvatten gemiddeld een groter percentage van de tekst,dan de corresponderende gedeelten van de andere lijsten,' en is daarom beter dan elke andere Engelse woordenlijst van dezelfde grootte.
2. Hetzelfde geldt voor de eerste 2000 woorden van de "K.L.M."lijst.
3. De "K.L.M."-lijst heeft voor alle teksten het laagste aantal outsiders, (met uitzondering van no.10,die een iets betere index heeft voor Palmer's "3000-Word list".) en is dus superieur aan alle andere Engelse vocabulaires.

<u>De betekenis van dergelijke analyses voor onderwijsdoeleinden.</u>
Alleen met een analyse zoals de voorafgaande kunnen we ons een mening vormen van de moeilijkheid van een boek,wat betreft de woordenschat. Het is in de toekomst zeer belangrijk,dat leraren in de vreemde talen bij het opsporen van geschikt lees-materiaal voor hun klassen worden gesteund door een dergelijke analyse in het voorwoord van elk boek.

Zou zo'n leeraar bv.onderzoeken "Ben Hur"van Lewis Wallace,dan zou hij de mededeling lezen,dat drie gedeelten,ieder van 1000 woorden geanalyseerd zijn:één aan het begin,één in het midden en één op het eind van het boek en dat het gemiddelde volgens de "K.L.M."-lijst zich als volgt gedroeg:

	K	L	M	K+L	K+L+M	Outsiders
Lewis Wallace,Ben Hur	89.9	6.3	1.9	96.2	98.1	1.9

Hieruit zou hij gadelijk zien,dat het over het geheel een tamelijk gemakkelijk boek is,maar dat het meer geschikt is voor de hogere dan voor de eerste twee jaren van hun studie.Op elke pagina met ongeveer 400 woorden,liggen gemiddeld 40 woorden buiten de eerste zone van 1000 woorden. Hiertoe behoren 8 woorden in de derde zône en verder 8 outsiders.

').
Behalve de eerste duizend woorden van Palmer's "second Interim Report" zoals ze door den auteur (Bongers) zijn gerangschikt.Daar deze lijkt door Palmer is verdeeld in 5 zônes van 600 woorden in vergelijking nie eenvoudig.

Hier volgen nog enige vandeze analyses:

G.K.Chesterton THE MAN WHO WAS THURSDAY.	86	5.7	3.4	91.7	94.1	4.9
G.B.Shaw,CANDIDA.	89	5.5	3.4	94.5	97.9	2.1
G.B.Shaw,YOU NEVER CAN TELL.	87.7	6.4	3	94.1	97.1	2.9
Walter Lippman,U.S.WAR AIMS.	81	10.5	5.3	91.5	96.8	3.2
Dickens,DOMBEY AND SON.	84.9	7.5	3.1	92.4	95.5	4.5
Stephen Leacock,LITERARY LAPSES.	84.9	8.3	3.3	93.2	96.5	3.5

Einde citaat uit "The History and Principles of Vocabulary Control".

XIX

→ Frequenz.

→ Rangnummer.

(Mit Kaeding: Häufigkeitswörterbuch der deutschen Sprache)

Naast de in de vorige syllabus behandelde normale verdeling noemen we nog die der "zeldzame gebeurtenissen" van Poisson.Het gaat hie bij om gebeurtenissen met zeer kleine kans p ,die echter door het grote aantal n der proefnemingen nog tot een meetbare frequentie pn aanleiding geeft.De kans op precies x "gunstige" uitslagen onder n proefnemin gen is:

$$\binom{n}{x}\ p^x.(1-p)^{n-x}$$

Laten we n zodanig naar oneindig gaan,dat pn een limiet a heeft,dan nadert deze uitdrukking tot:

$$\frac{a^x.e^{-a}}{x!} \qquad \text{(wet van Poisson).}$$

Uit $\sum_x \frac{a^x.e^{-a}}{x!} = 1$ volgt door differentiatie naar a :

$$\sum_x \frac{xa^x.e^{-a}}{x!} = a \quad ; \quad \sum_x \frac{x(x-1).a^x.e^{-a}}{x!} = a^2 .$$

Voor deze verdeling is dus zowel het gemiddelde als de kwadratische afwijking gelijk aan a .

Voor de verdeling van Poisson bestaan niet zoveel overtuigende voorbeelden als voor de normale verdeling.Het klassieke voorbeeld is dat van het aantal dodelijke ongevallen veroorzaakt door de trap van een paard (in het Pruisische leger).Precieser de statistiek bevat voor elke x het aantal legercorpsen ,waarin (over een bepaald tijdsbestek gerekend) x dergelijke gevallen voorkwamen; deze functie van x is alleen voor kleine x van nul verschillend;zij loopt ongeveer volgens de wet van Poisson.Andere onderzochte voorbeelden zijn:De kinderzelfmoorden,de huwelijkssluitingen op een hoge leeftijd.

We keren tot de normale verdeling terug, die wij door een speciaal urnenschema hadden verkregen,maar die algemener kan worden gebaseerd.Neemt U een urne,waarin een groot aantal briefjes liggen met zekere reeele getallen x erop.Het gemiddelde van deze getallen zij $\bar{x}$, hun middelbare afwijking σ .Nu neemt U steekproeven van de lengte n, en maakt de som y op van de "fouten" $x-\bar{x}$ voor de n briefjes van een steekproef.Naar U weet bezit de verdeling van deze y-briefjes (d.w.z. briefjes waarop y vermeld staat) de mid.afw. $\sigma\sqrt{n}$ .Maakt U nu briefjes met de waarden $y/\sqrt{n}$,dan hebben deze samen de mid.afw. σ . Nu blijkt voor grote n de verzameling van deze $y/\sqrt{n}$ -briefjes een verdeling te bezitten,die niet veel verschilt van de normale verdeling me de mid.afw. σ .En wel geldt dit volkomen onafhankelijk van de oorkelijke verdeling der x-briefjes-alleen zal de convergentiesnelheid d de normale verdeling wel van de x-verdeling afhangen.

Zonder verder bewijs merken we nog op: is $\boxed{x}$ een normaal verdeelde grootheid, dan ook $\boxed{\alpha x}$. Verder: zijn $\boxed{x}$ en $\boxed{y}$ onafhankelijk en normaal verdeeld, dan ook $\boxed{z} = \boxed{x} + \boxed{y}$.

Zijn de afzonderlijke coordinaten $\boxed{\xi_\nu}$ van een k-dim. vector $\boxed{x}$ normaal verdeeld met de mid.afw. σ_ν dan spreekt men van een k-dim. normale verdeling van de vector $\boxed{\vec{x}}$. De kans, dat het punt x gelegen is in het paralellopipedum met het hoekpunt $(\xi_1 \dots \xi_k)$ en de ribben $d\xi_1 \dots d\xi_k$ is dan dus

$$\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \cdots \frac{1}{\sigma_k\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{\xi_1^2}{2\sigma_1^2}} \cdots e^{-\frac{\xi_k^2}{2\sigma_k^2}}\, d\xi_1 \cdots d\xi_k$$

Vaak is het doelmatig om de coordinaten op gelijke nauwkeurigheid te normeren (dus gelijke mid.afw. door geschikte keuze der eenheden langs de assen). Dan wordt dus $\sigma_1 = \cdots \sigma_k = \sigma$ en de kansdichtheid is dus:

$$\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^k e^{-r^2/2\sigma^2} \qquad \left(r = |x| = \sqrt{\xi_1^2 + \cdots + \xi_r^2}\right)$$

Evenals we in het ééndimensionale geval de kans op een overschrijding van een bepaalde afwijking in σ uitdrukten hebben we hier belangstelling voor de kans, die er bestaat op een afwijking $r \leq \rho$ of $r \geq \rho$ d.w.z. we moeten de integraal

$$\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^k \int\cdots\int_{B_\rho} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\, d\xi_1 \cdots d\xi_k \qquad (*)$$

over de bol B_ρ met straal ρ kennen. Het is voldoende deze voor $\sigma = 1$ te berekenen. Dit kan geschieden door een soort transformatie op poolcoordinaten. In iedere sferische schil is de integrand n.l. constant. Zij V_r het volumen van de k-dimensionale bol met straal r, dus $V_r = r^k . V_1$. Dan wordt de integraal (voor $\sigma = 1$)

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^k \int_0^\rho e^{-\frac{r^2}{2}}\, dV_r$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^k k V_1 \int_0^\rho e^{-\frac{r^2}{2}}\, r^{k-1}\, dr \qquad (**)$$

Deze integraal kan door de transformatie $r^2 = u$ vereenvoudigd worden en is dan voor even k elementair te berekenen en voor oneven k terug te voeren op de integraal $\int_0^\rho e^{-r^2/2}\, dr$

Voor $\rho = \infty$ moet de integraal $(*)$ of $(**)$ uiteraard $=1$ worden. In de practijk bedient men zich meestal van

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^k \int\cdots\int_{\text{buiten } B_\rho} e^{-\frac{r^2}{2}}\, d\xi_1 \cdots d\xi_k \qquad \left(\frac{*}{**}\right)$$

die $(*)$ tot 1 aanvult.

De functie $\left(\frac{*}{**}\right)$ is nu in de practijk onder de dwaze (historisch gefundeerde) naam χ^2-distributie bekend, en wat theoretisch bijzonder dwaas (maar practisch) is: men heeft haar niet als functie van ρ doch als functie van ρ^2 getabuleerd. Aan de meeste statistici is het n.l. niet duidelijk geweest, dat zij eenvoudig het buiten de straal ρ gelegen deel van de sferische normale verdeling in k dimensies voorstelt. Het g[illegible]

tal,dat we hier k genoemd hebben, heet dan de vrijheidsgraad (of n of n'-1); i.p.v. χ^2 wordt χ gezegd ,en de integraal (**) zelf heet de"overschrijdingskans".Deze kans om buiten de straal ρ te geraken worddt met P aangeduid.Voor k=1 krijgen we natuurlijkde buiten het interval $(-\rho, \rho)$ gelegen oppervlakte van de normale kromme als functie van . (Hoeveel verwarring op dit punt heerst ,blijkt b.v. uit het boek van Yule and Kendall,die practisch dezelfde tafel in appendix 3 en 4 twee maal afdrukken).

Een uitvoerige χ^2-tafel staat bij K.Pearson Tables for Statisticians,2nd ed.,1923.p.26-28.Practisch is het diagram bij Yule and Kendall An introduction to the theory of Statistics,13th ed.,1947,p.540,dat wij overnemen.Hierin vinden we aangegeven de lijnen van constante P als k en χ^2 langs de assen zijn afgezet.Verder geven wij nog een diagram,waarin voor de verschillende vrijheidsgraden 1,2...15 het verloop van P met χ^2 wordt aangegeven.

Vergelijking met onze beknopte tafel (syllabus XVIII blz.8) leert. dat hier blijkbaar $\sigma = 1$ gesteld is .Het argument is niet de afwijking maar haar kwadraat (χ^2);de getallen van 0,0001 tot 0,999 aan de rand van het eerste diagram slaan op de overschrijdingskans (d.w.z. de kans op een overschrijding van de bijbehorende kwadratische afwijking χ^2 ; in het eerste diagram is P aangegeven met 1 als eenheid,in de tweede grafiek is P uitgedrukt in procenten.

Hoe men te work gaat als de strooiing niet sferisch is,maar de afzonderlijke coordinaten verschillende mid.afwijkingen σ_ν bezitten,is al gezegd: men normeert op gelijke nauwkeurigheid.Nog algemener is het geval van ellipsoidale strooiing,met hoofdassen ,die van de coordinaatassen verschillen.Er is dan een kwadratische vorm

$$x'Q\,x = \sum_{\mu\nu} q_{\mu\nu}\,\xi_\mu\,\xi_\nu \qquad (q_{\mu\nu} = q_{\nu\mu})$$

zo dat in elke ellipsoidale schil

$$x'Q\,x = \text{constant}$$

dezelfde kansdichtheid $C\,e^{-\frac{1}{2}x'\varphi x}\,d\xi_1 \cdots d\xi_n$

heerst(C is zo te bepalen ,dat di integraal over het geheel 1 wordt). Toch is dat niets nieuws,want door een draaiing kan men Q op de diagonaalvorm brengen, en hierbij wordt $d\xi_1 \cdots d\xi_n$ niet gewijzigd.De σ_ν^2 zijn niets anders dan de omgekeerden van de eigenwaarden van Q en dus is . $C = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \cdots \frac{1}{\sigma_n\sqrt{2\pi}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \sqrt{\Delta\,\varphi}$

Numeriek heeft men door de transformatie op de hoofdassen ook deze generalisatie onder de knie...

*) en wel in beide diagrammen,

Transformeert men Q op de eenheidsmatrix

$Q=T'T$, $y=Tx$, $x=T^{-1}y$ dan wordt

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^k \sqrt{\det\varphi}\, e^{-\frac{1}{2}x'\varphi x}\, d\xi_1 \dots d\xi_k = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^k \sqrt{\det\varphi}\, \det T^{-1}\, e^{-\frac{y'y}{2}}\, d\eta_1 \dots d\eta_k =$$

dus gem. $\boxed{\eta_i \eta_j} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i=j \end{cases}$; dus $\left(\text{matrix gem. } \boxed{\xi_r \xi_s}\right) = T^{-1}T^{-1'} = \dots$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^k e^{-\frac{1}{2}y'y}\, d\eta_1 \dots d\eta_k$$

Op deze wijze hangen de gem. $\xi_r\ \xi_s$,ook momenten genaamd,met Q samen.

Toepassing van de kansrekening op de foutentheorie.

Zonder kansrekening geeft de mid.fout of mid.afw. slechts vage inlichtingen.Een observatie ,die ver buiten de grenzen van de mid.fout valt zullen we wantrouwen en twee grootheden, waarvan de gem. iets van de orde van grootte van hun mid.fout verschillen ,zullen we practisch dezelfde waar e toekennen.Dit"ver buiten" of "orde van grootte" kunnen we nu met het begrip "overschrijdingskans" preciseren.Dit is echter alleen mogelijk als we op de hoogte zijn van de wet, volgens welke de waarden van de grootheid om hun gemiddelde strooien.In het vervolg moeten we steeds veronderstellen,dat dit geschiedt volgens de normale verdeling met een eveneens bekende σ .We hebben gezien,dat deze veronderstelling onder veel omstandigheden aanvaardbaar is.Alleen over de werkelijke grootte van σ kan men in het duister tasten .Meestal helpt men zich door σ van de steekproef als de ware σ te accepteren. Daar de σ van de steekproef sneller naar de ware waarde convergeert (bij het laten aangroeien van de steekproef) dan het gem. van de steekproef naar het ware gem., is dat procédé aanvaardbaar voor "grote" steekproeven(b.v. > 30 voor 1 vrijheidsgraad).

Alle in het vervolg behandelde kwesties komen nu op het volgende probleem neer: een conclusie(t.o.v. een zekere grootheid), die men exact alleen zou kunnen trekken uit de kennis van alle metingen van die grootheid (b.v. lengte van alle inwoners van Nederland, trekken van alle balletjes uit een urne) wordt getrokken op grond van een steekproef ,echter dan niet exact;maar slechts met een zekere waarschijnlijkheid.de typische formulering hiervan is de volgende:

1. Invariante hypothese: de grootheid $\boxed{x}$ strooit normaal.
2. Invariante hypothese: de mid.afw. $\boxed{x}$ is σ.(Deze hypothese zal over het algemeen gebaseerd zijn op de gemeten σ van een steekproef, of als $\boxed{x}$ een frequentie is,op de formule $\sqrt{\frac{pq}{n}}$).

Men neemt een steekproef van de lengte n en constateert hiervoor gem. $\boxed{x} = x_0$.Daaruit wenst men een conclusie te trekken over ware gem. $\boxed{x}$ en men oppert om de een of andere reden de

3. te "testen" hypothese: ware gem. $\boxed{x} = \bar{x}_c$.Volgens deze hypothese bestaat er dus waar en geobserveerd gem. een verschil $= \lambda$ -

Het testen van deze hypothese geschiedt als volgt:

4. Men spreekt af de hypothese te aanvaarden resp. te verwerpen naar gelang er onder de hypothese een waarschijnlijkheid $\geqq w$ resp. $< w$ bestaat op een afwijking $\geq \delta$ van het ware gemiddelde $\bar{x}_o$ bij het nemen van een steekproef van de lengte n.
5. Men gaat na hoe groot de waarschijnlijkheid in feite is volgens de normale verdeling met de mid.afw. σ en aanvaardt of verwerpt dienovereenkomstig de hypothese.

Hoe men over w beschikt hangt van het probleem af b.v. van de belangen ,die er mee gemoeid zijn.Laten we veronderstellen,dat de hypothese behelst,dat een bepaalde technische vernieuwing (volgens een proefneming) zekere besparing in get fabricage-procédé oplevert.Vereist de vernieuwing grote investeringen,terwijl bespering niet zo overweldigend is,dan zal men tot de herziening alleen overgaan als de waarschijnlijkheid op de juistheid van de hypothese zeer groot is (b.v. 95 % of 99 %) zijn geen grote investeringen vereist, terwijl de besparing groot is dan zal men bij een kleinere kans op de juistheid van de hypothese tot herziening overgaan.

Voorbeeld van het testen van een hypothese:men heeft 1000keer een munt opgegooid en 473 keer kruis en 527 meal munt gevonden.De hypothese luidt,dat het muntstuk "eerlijk" is,d.w.z. 50% kans voor kruis en 50% voor munt.Men stelt $\sigma = \sqrt{1/2.1/2.1/1000}$ .De gemeten frequentie 0,473 voor kruis wijkt van de hypothetische met 0,027 af.Men vergelijkt de kans op een afwijking $\geqq$ 0,027 (die men uit een tafel kan aflezen) met de kans w, die men als richtsnoer voor het aanvaarden of verwerpen van de hypothese heeft gekozen.

Ander voorbeeld:Men heeft een aantal Noordhollandse en Limburgse recruten gemeten en geconstateerd,dat de gemiddelde lengte l_N van de eerste groep groter is dan die van de tweede: l_L.De hypothese luidt ware $|l_N| >$ ware $|l_L|$ .Men behandelt haar door transformatie op de zogenaamde nulhypothese ware gem. $(|l_N| - |l_L|) = 0$, die men nu juist gaat trachten te weerleggen.Zijn de mid.afw. van gem. $|l_N|$ en gem. $|l_L|$ bekend (of als bekend verondersteld),dan geeft Pythagoras die van de grootheid gem.$(|l_N| - |l_L|)$.Volgens de te weerleggen hypothese is het ware gem. $(|l_N| - |l_L|) = 0$.Het gemeten gemiddelde vertoont een afwijking δ ,en men berekent nu de kans op een afwijking $\geq \delta$ onder de veronderstelling met een normale verdeling der gem. te maken te hebben met veronderstelde mid.afw.Naargelang of deze kans klein of groot is, aanvaardt of verwerpt men de nulhypothese,dus verwerpt of aanvaardt men de hypothese ,dat de Noordhollandse recruten werkelijk groter zijn dan de Limburgse.

Analoog voorbeeld:Twee soorten kunstmest moeten worden vergeleken op grond van een aantal bemestingsproeven,die men met beide heeft genomen. Aan de lengte der recruten in het vorige voorbeeld beantwoordt hier de opbrengst.

I.p.v. de hypothese ,dat de N-recruten groter dan de L-recruten zijn kan men ook de hypothese testen, dat zij met een bepaald aantal c.m. groter zijn.Analoog bij de kunstmest.

Een andere manier om deze problemen te behandelen, is de volgende: men gooit de N- en L-recruten bij elkaar,zodat zij één universum vormen Bij a_N resp. a_L recruten met gemiddelden l_N resp. l_L en mid.afw. σ_N en σ_L ontstaat een universum met

$$\text{gem.}=l = \frac{a_N l_N + a_L l_L}{a_N + a_L} \qquad \text{en } (\text{mid.afw.})^2 = \sigma_N^2 + \sigma_L^2 + \left(\frac{a_N a_L}{a_N + a_L}\right)^2 \cdot (l_N - l_L).$$

Men berekent de kans uit zulk een universum een steekproef te trekken met een gemiddelde ,dat van l met $\geq l_N - l$ afwijkt.

De Pythagoras van de mid.afw. geldt alleen bij het optellen en aftrekken van onafhankelijke grootheden.Hebben we echter te maken met de lengten van de vaders en hun zonen (l_V, l_Z) (van elke vader één zoon), dan kunnen we voor de berekening van mid.afw.$(|l_Z| - |l_V|)$ niet met Pythagoras volstaan, maar moeten afzonderlijk voor elk paar $l_V - l_Z$ berekenen en van deze getallenrij de mid.afw.Hebben we de gemiddelden op 0 genormeerd dan komt erbij $\sigma_V^2 + \sigma_Z^2$ nog een term $\sum l_V l_Z$ (correlatie).

Analoog voorbeeld:de verschillende opbrengsten bij de twee bemestingsmethoden zijn niet onafhankelijk van elkander,maar in resp. de zelfde jaren of resp. op gelijke soorten akkers verkregen.

De volgende voorbeelden zijn van het meerdimensionale type.

De bemesting met kunstmest 1 heeft in het jaar i (gemiddeld over een aantal akkers) zekere opbrengst $t_i^{(1)}$ opgeleverd met mid.afw. $\sigma_i^{(1)}$ analoog met kunstmest 2 : $t_i^{(2)}$ en $\sigma_i^{(2)}$.De opbrengst is nu geen getal maar een punt in de ruimte met zoveel dimensies als er jaren in aanmerking komen. Deze punten moeten met elkaar worden vergeleken,b.v. door transformatie op de nulhypothesed.w.z. onderzoek van hun vectorverschil.Dat wordt als normaal verdeeld beschouwd,met een functie

$$\frac{1}{c}\, e^{-\sum \frac{\xi_i^2}{2\sigma_i^2}} \qquad \left(\sigma_i^2 = \sigma_i^{(1)2} + \sigma_i^{(2)2}\right)$$

Men normeert de verschillende coordinaten $t_i^{(1)} - t_i^{(2)}$ op gelijke mid.afw. en berekent de waarschijnlijkheid op een afwijking $\geq$ de afwijking die het punt $t^{(1)} - t^{(2)}$ vertoont.In geval van kleine waarschijnlijkheid constateert men een significant verschil tussen de twee soorten kunstmest. Volgens de zelfde methode had men bij de "Vocabulary Control" te werk ...

ten gaan;de frequenties van outsiders onder de 10x1000 woorden zijn de 10 coordinaten van de onderhavige grootheid.

De zaak wordt ingewikkelder als de verschillende coordinaten van de grootheid onderling afhankelijk zijn en de spreiding dus niet sfe risch is of niet ellipsoidaal met de coordinatenassen als hoofdassen. B.v. men heeft van de N- en L-recruten (niet alleen de lengte maar) 10 lichaamsmaten genomen.Deze strooien normaal ,maar met een schuinliggende ellipsoide (bij grotere lengte behoort over het algemeen een groter gewicht enz.).De frequentiefuncties zijn op een constante functie na

$$e^{-\frac{1}{2}x'\varphi^{(1)}x} \quad \text{en} \quad e^{-\frac{1}{2}x'\varphi^{(2)}x}$$

Hieruit berekent men door overgang tot Q^{-1} de functies voor de verschilvector tussen de N- en L-ruimten:

$$e^{-\frac{1}{2}x'\varphi x}$$

en onderzoekt weer de waarschijnlijkheid,dat het verschil $\geq$ het geobserveerde verschil,en constateert als deze klein is, dat de N- en L-recruten tot verschillend-soortige populaties behoren.

Een bijzonder belangrijk geval wordt door het volgende voorbeeld gegeven:

Bij 10.000 keer dobbelen met één dobbelsteen(zie syllabus XVIII) heeft men voor de 1...6 bepaalde frequnties verkregen.Men wil de hypothese testen ,dat de dobbelsteen eerlijk is,d.w.z. dat de kans voor elk cijfer 1/6 is.De verkregen frequenties p_i stellen een punt in de 6-dim. ruimte voor.Ze zijn echter niet onafhankelijk;er bestaat zelfs een functionael verband,n.l. $\sum p_i = 1$. Hoe luidt de verdelingsfunctie voor deze vectoren (we mogen aannemen,dat zij normaal is)?Algemener:In een urn zitten k verschillende soorten balletjes met de frequenties $p_1 \ldots p_k$; $\sum p_i = 1$ De frequenties in een steekproef ter lengte N stellen een punt in de k-dim. ruimte voor.Voor grote k zijn deze punten normaal verdeeld.We zullen bewijzen ,dat de verdelingsfunctie is

$$\mathrm{Const.}\; e^{-\frac{1}{2}N\sum \frac{(\xi_i - p_i)^2}{p_i}}$$

(genomen op het hypervlak $\sum \xi_i = 1$)

d.w.z. dat men de afwijkingen van de gemiddelden met de factoren $\sqrt{\frac{p_i}{N}}$ en niet(zoals men zou denken) met $\sqrt{\frac{p_i(1-p_i)}{N}}$.

We voeren $\eta_i = \sqrt{N}\,(\xi_i - p_i)/\sqrt{p_i}$ als nieuwe veranderlijken en tonen aan,dat de verdelingsfunctie op $\sum \sqrt{p_i}\,\eta_i = 0$

$$\mathrm{Const.}\; e^{-\frac{1}{2}\sum \eta_i^2}$$

wordt.Inderdaad is $\mathrm{gem.}\,(\xi_i - p_i)^2 = \frac{p_i(1-p_i)}{N} = \mathrm{gem.}\left(\frac{\sqrt{p_i}\,\eta_i}{N}\right)^2$

en gem.$(\xi_i + \xi_j - p_i - p_j)^2 = \frac{(p_i+p_j)(1-p_i-p_j)}{N}$

(omdat $\boxed{\xi_i} + \boxed{\xi_j}$ een frequentiegrootheid met gem.$=p_i+p_j$ is), dus

gem.$\left\{\frac{\sqrt{p_i}\,\eta_i + \sqrt{p_j}\,\eta_j}{N}\right\}^2 = \frac{(p_i+p_j)(1-p_i-p_j)}{N}$, dus

gem.$\left\{\frac{\sqrt{p_i p_j}}{N}\,\eta_i\,\eta_j\right\}^2 = -\frac{p_i p_j}{N}$ voor $i \neq j$

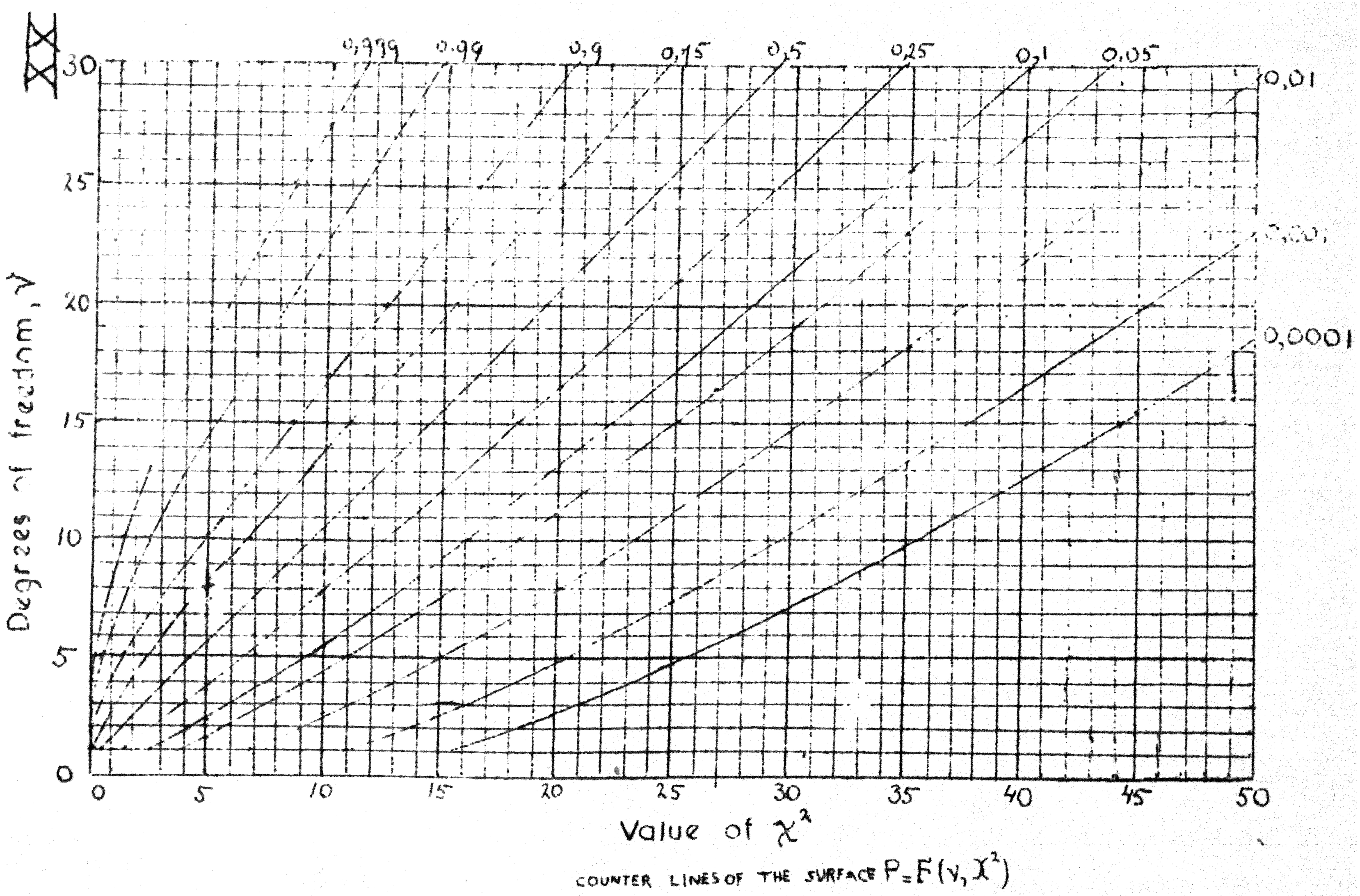
gem.$(\eta_i \eta_j)^2 = -\sqrt{p_i}\sqrt{p_j}$ voor $i \neq j$

gem.$\eta_i^2 = 1 - \sqrt{p_i}\sqrt{p_i}$

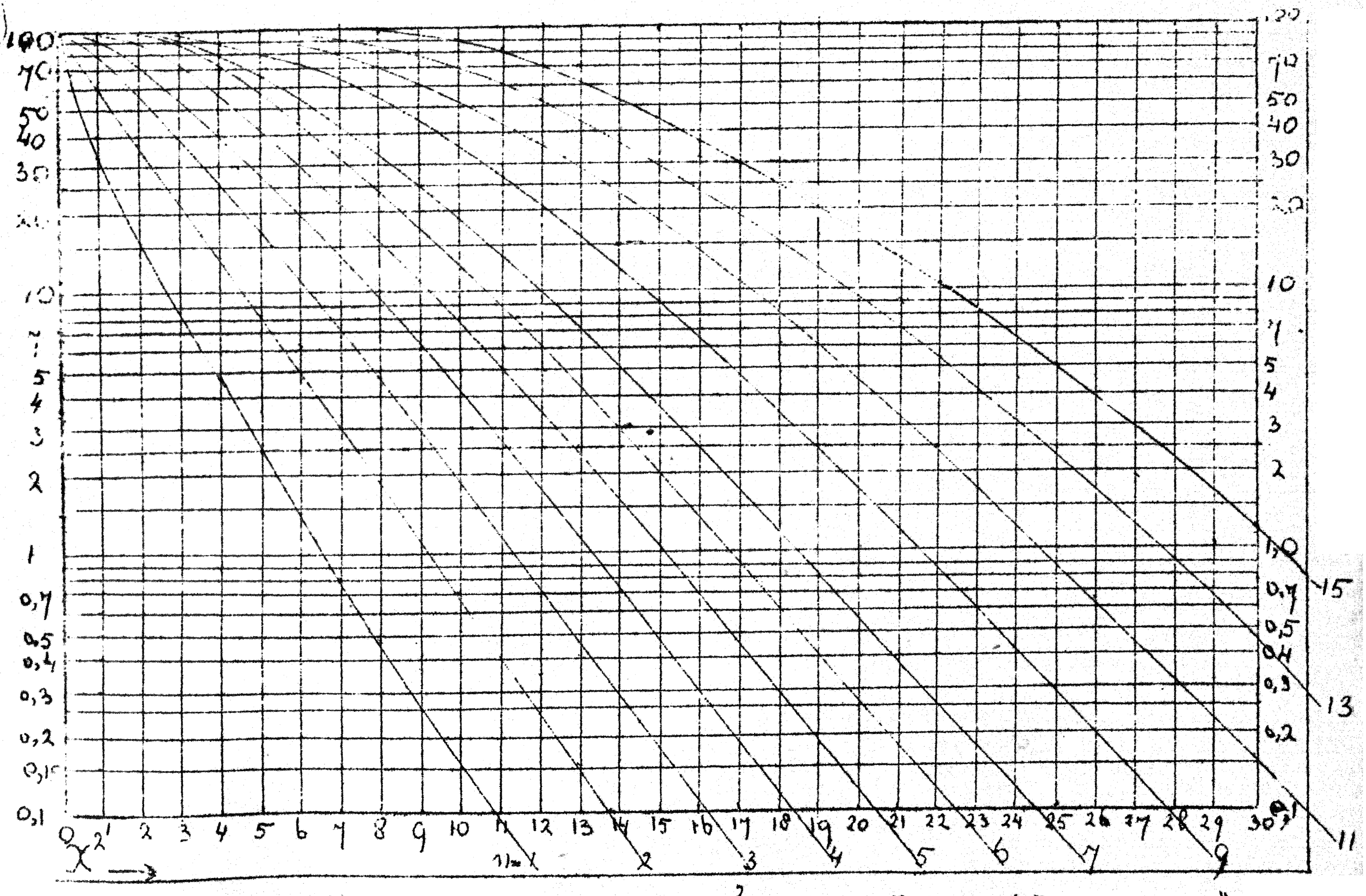
of matrix der gem.$\eta_i \eta_j = M = 1 - pp'$ (p=kolomvector $\sqrt{p_i}$). $pp'y = 0$ voor elke vector y, die loodrecht op p staat, en dus in het hypervlak $\sum \sqrt{p_j}\,\eta_j = 0$ bevat is. Blijft over een eigenvector van pp' in richting p, wegens $(pp')p = p(p'p) = (p'p)p$ met eigenwaarde p'p. Dus heeft M in het hypervlak alle eigenwaarden 1; dus de verdeling is sferisch.

q.e.d.

Men letto erop, dat dit niet een k-dim., maar een (k-1)-dim. verdeling is. Deze door K. Pearson ontdekte verdeling draagt speciaal de naam χ^2-verdeling.



COUNTER LINES OF THE SURFACE $P = F(\nu, \chi^2)$



NOMOGRAM VOOR DE X^2-TEST „OF GOODNESS OF FIT"

Critiek op Bongers (zie syllabus XIX).

Hier volgt nog eens een tafel der outsiders in de verschillende door Bongers gebruikte teksten (I- X).

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
Thorndike	58	41	34	44	32	32	26	21	13	15
Palmer	42	42	37	35	32	28	21	20	13	8
Faucett-Maki	51	48	35	42	34	34	26	18	15	20
Bongers	40	36	32	31	26	26	25	14	12	10

Elk getal geeft het aantal outsiders aan op 1000 woorden tekst.Elk getal is met een middelbare fout behept gelijk aan zijn vierkantswortel.Men zou zich de getallen op gelijke nauwkeurigheid genormeerd kunnen voorstellen.Om te zien of het verschil Palmer-Bongers significant is,trekken we de vector "Palmer" van de vector "Bongers" af (nulhypothese!) en bepaler de longte van de verschilvector (na normering).De 42 van Palmer is met een middelbare fout $\sqrt{42}$ behept;de 40 van Bongers met een midd.fout $\sqrt{40}$;hun verschil dus met $\sqrt{(\sqrt{42})^2 + (\sqrt{40})^2} = \sqrt{82}$
Dus moet men vormen het χ^2

$$\frac{(42-40)^2}{42+40} + \frac{(42-36)^2}{42+36} + \ldots = 3{,}519$$

Het aantal vrijheidsgraden is 10.Uit een tafel of monogram lezen we af, dat de overschrijdingskans =94%.D.w.z. de te testen nulhypothese, dat er tussen Palmer en Bongers geen verschil is, is met de waargenomen afwijkingen verenigbaar met een kans van 94%.Of populair gezegd: de kans erop,dat de afwijking reeel is, bedraagt maar 6%, de kans ,dat ze toevallig is bedraagt 94%.

Analoog Thorndike-Bongers.

$\chi^2 = 9{,}662$; overschrijdingskans 37%.

Faucett-Maki- Bongers.

$\chi^2 = 10{,}727$; overschrijdinskans 30%.

Men zou in deze gevallen desnoods van een significant verscil kunnen spreken.

Aan onze beoordeling ligt de veronderstelling ten grondslag, dat de steekproeven van 1000 normaal strooien.Dit zou het geval zijn ,wanneer de woorden van een taalbrokraak over de bladzijden verstrooid zijn en wel volgens hun frequentie,of misschien ook als men de steekproef niet uit aaneengesloten stukken samenstelt.Om deze veronderstelling te toetsen heb ik 10 steekproeven van 1000 uit het boek IV laten nemen (dus uit de lijst Bongers).Het gemiddelde bleek ongeveer met dat van Bongers overeen te komen, maar de midd.afw. was bovennormaal met een factor 1,

Veronderstelt men dit als algemeen geldig en deelt men de verkregen χ^2's door 1,7 ,dan worden de overschrijdingskansen 99%,76%,70%, dus alle verschillen significant.

Men kan de critiek op Bongers c.s. dieper funderen.Bij een taal behoort een frequentiekromme F(n); hierbij is n het rangnummer van het woord (gerangschikt volgens afnemende frequentie) en F(n) de frequentie van het n-de woord.Ik heb uit de literatuur alleen de frequentiekromme van het Duits kunnen vaststellen (op grond van F. Kaeding Häufigkeitswörterbuch der deutschen Sprache,Berlin 1898; materiaal 10.910.777 woorden).Zie hiervoor de grafiek met logarithmische schaal in abcis en ordinaat.De kromme gedraagt zich verschillend in de intervallen 1-15,16-300 300-8000,8000-....In het belangrijke interval 301-8000 is F(n) vrij nauwkeurig= $\Phi,38 \cdot n^{-1,07}$.Voor het Engels zijn de constanten natuurlijk anders;de exponent is absoluut genomen vermoedelijk iets groter.Voor het gemak rekenen we met $F(n)= C/n$.De frequentie van het 3000-e Engelse woord schat ik op 16 in het millioen.Dit met een middelbare fout $\sqrt{16} = 4$ .Voor de rangorde n=C/F(n) geeft dit een mid.fout v n 3000/4= =750.Bij een materiaal van 11.000.000 woorden zou de fout op ca.200 gereduceerd zijn.We zien hieruit ,dat een materiaal van 1.000.000 woorden geheel ontoereikend is voor de plaatsbepaling v n de basisgende woorden.Toch gaan de onderzoekers nooit daarboven;vaak zijn ze met 100.000 tevreden.

Men kan b.v. bij een materiaal van 1.000.000 woorden de woorden 2901-3000 met de woorden 3001-3100 verwisselen zonder een significant verschil bij de outsiders.Bij een materiaal van 11.000.000 woorden maar 2975-3000 met 3001-3025.(Reken dit zelf na!).

Dat het materiaal van 10.000 woorden van Bongers geheel onvoldoende is,ziet men ook zo in: van de woorden 1001-2000 komen in zijn testmateriaal maar 558 voor,waaronder wellicht nog vele doubletten.Van 2001-3000 maar 244 woorden,waaronder ook weer veel doubletten.Hoe kan hij zijn lijsten hiermee testen?

Het woord outsider is misleidend.5% frequentie betekent:om de andere regel van een normale tekst een outsider d. w. z. een onbekend woord,wanneer men het vocabulaire tot de woorden 1-3000 beperkt.Dat is veel te veel .Men zou proefondervindelijk moeten vaststellen wat toelaatbaar is.Het vocabulaire-probleem ontstaat juist doordat de frequentiekromme van 300-8000 zo'n traag verval vertoont.Het 3000-e woord heeft een frequentie van 16 op het millioen,het 8000-e van 6.Dat is practisch hetzelfde.De leerling komt voor de taak te staan een massa woorden tegelijk te leren, die alle even belangrijk en frequent zijn.Niet vocabulairebeperking maar vocabulaire-verrijking is vereist.

<u>Critiek op het begrip overschrijdingskans.</u>

1. Stel dat een roulette (met 37 vakjes) op 37.000 keer elk der vakjes 1-36 997 keer heeft laten uitkomen en het vakje 37 :1108 keer. Te testen hypothese :Het is een eerlijke roulette ,dus elk vakje heeft de kans1/37.

$$\chi^2 = 36 \cdot \frac{3.3}{1000} + \frac{108.108}{1000} = 11.988.$$

Aantal vrijheidsgraden=36.Overschrijdingskans= 99.9..%.Dus een eerlijke roulette.

2. Stel nu het zelfde geval maar let enkel op al-of-niet-37.Dus Vakje 1-36 :35892. Vakje 37: 1108.

$$\chi^2 \frac{=108.108}{36.000} + \frac{108.108}{1000} = 11,988$$

Dus χ^2 is hetzelfde als boven,maar thans hebben we 1 vrijheidsgraad. Overschrijdinskans 0.001%.Dus een vervalste roulette.

Hier is iets niet in orde.Men zou n.l. het omgekeerde verwachten: wanneer ik de uitkomsten nauwkeuriger ken,dan is de kans op afkeuren groter.Of :als het bij één vakje hapert,dan is het al helemaal mis. De oorzaak van deze paradox zit in het begrip overschrijdingskans.Men kijkt niet naar "hoe groot is de kans van de verkregen uitkomst?", maar naar "hoe groot is de kans,dat de afwijking zo groot is of nog groter?".Waarom dan niet naar "zo klein of nog kleiner.Dan had men zojuist de tegengestelde conclusie kunnen trekken.

Maar hoe zou het anders kunnen!De kans op een bepaalde uitkomst is miniem,bij continue verdeling zelfs nul.Nu is elke continue meting met een onnauwkeurigheid behept;men heeft dus ook bij de continue verdeling een bepaalde eindige (minieme)kans in elk punt (n.l. de kans in de omgeving van dit punt te geraken).Maar ook de kleinheid van de de kansen is niet zo erg,wanneer men de kansen maar met een geschikte maatstaf ijkt.Als zodanig kan men nemen de maximale kans (die bij een normale verdeling bereikt wordt in 0, en daar de waarde $1/\sqrt{2\pi\sigma}$ heeft).Ijkt men hiermee,dan wordt de kans voor een afwijking x eenvoudig $e^{-x^2/2\sigma^2}$ (de integrand van de foutenintegraal).

Algemeen bij meerdimensionale verdeling:

$$e^{-\frac{1}{2}x'\varphi x} = e^{-\frac{1}{2}\chi^2}$$

Dat blijft onafhankelijk van het aantal vrijheidsgraden.Bij de gebruikelijke methode wordt gekeken naar hetgeen buiten de straal χ ligt, en dat groeit met het aantal vrijheidsgraden aan.

Heeft men met één bepaalde vrijheidsgraad te maken dan is het eenvoudig een straalkwestie;zodra men verschillende vrijheidsgraden vergelijkt ,blijkt de gebruikelijke methode voor hogere vrijheidsgraden veel te laks te zijn,wat toelaatbare afwijkingen aangaat,dus veel te streng ten aanzien van significantie van verschillen.

Wat het nieuwe voorstel aangaat,schijnt het een nadeel,dat de formulering "zoveel procent van de maximale kans" ietwat onbepaald lijkt. Maar dat is wel meer een kwestie van onwennigheid.

Een voordeel is,dat de geijkte kans wordt gemeten door $e^{-\frac{1}{2}\chi^2}$; tafels zijn overbodig.De logarithme hiervan is trouwens in de natuurkunde bekend als entropie.

Toepassing van deze methode op het vraagstuk van Bongers levert uiteraard gunstige uitkomsten (wat significantie aangaat),maar zonder principieel verschil.

"<u>Studentization.</u>"

Is de grootheid $[x]$ normaal verdeeld met een gem.=0 en bekende mid.afw. σ ,dan kunnen wij van elke waarde x de kans berekenen.In voorkomende gevallen schat men σ op grond van een steekproef van de lengte n.Is deze n groot genoeg,dan is hiertegen geen bezwaar,omdat de invloed van fouten in σ van kleinere orde in n is. Voor kleine steekproeven maakt men gebruik van een kunstgreep van Student (pseudoniem van Gosset).I.p.v. $\left[\frac{x}{\sigma}\right]$,dat volgens $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ verdeeld

1) is,beschouwt men $\left[\frac{\text{gem}[x]}{s}\right] = [t]$ waar s de mid.afw. van een <u>steekproef</u> (ter lengte n)is.Doordat men alle mogelijke steekproeven doorloopt, krijgt men van $[t]$ een kansverdeling $\Phi(t)$.Dat is dan de z.g.

1) $\left[\frac{\text{gem}[x]}{s}\right] = [t]$

Studentverdeling.Deze is gemakkelijk te berekenen.We representeren de steekproef $\xi_1 \ldots \xi_n$ door een punt y in de n-dim. ruimte.Zijn projectie y' op de vector e=(1,...,1) is gem. $\boxed{x}$ .e;dus $|y'| = |\text{gem.}\boxed{x}|\sqrt{n}$ De afstand y-y' is $s\sqrt{n}$ .Dus $t=\text{ctg}\,\varphi$ (φ =hoek(e,y)).We moeten nu voor elke waarde van t de kans $\Phi(t)$ berekenen.De verdeling van $\boxed{x}$ was normaal met een gem. =0,mid.afw.= σ ;die van y is dus n-dim. normaal. Voor een vaste $t=\text{ctg}\,\varphi$ moeten we de normale verdeling dus integreren over de kegelmantel gevormd door alle y-en,die de hoek φ met e maken.De kegel snijdt de eenheidssfeer in een (n-2)-dimensionale sfeer met straal $=\sin\varphi$;wegens de centraalsymmetrie der normale verdeling is deze integraal evenredig met de oppervlakte van die (n-2)-dimensionale sfeer,dus met $\sin^{n-2}\varphi = (1+\text{ctg}^2\varphi)^{-\frac{n-2}{2}}$ - $\text{ctg}\,\varphi = t$ en $d\varphi = -(1+t^2)^{-1}dt$.Dus $\Phi(t)$ is evenredig $(1+t^2)^{-\frac{n}{2}}$ .De evenredigheidsfactor wordt bepaald door integratie over de hele ruimte:

$$\Phi(t) = \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi}\sqrt{n-1}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{(1+t^2)^{n/2}}$$

is de Studentverdelingsfunctie.Hiervoor bestaan tafels (d.w.z. voor $\int_t^\infty \Phi(t)dt$).Voor grote n krijgt men uiteraard de normale verdeling.

De toepassing is deze:men heeft een kleine steekproef van een grootheid $\boxed{x}$ .Men veronderstelt normale verdeling met gemiddelde b.v. =0.Men berekent gemiddelde en mid.afw. van de steekproef.Hun quotient is t.De tafels geven de overschrijdingskans voor deze t.Op grond van deze kans beoordeelt men of de veronderstelling over het gemiddelde aanvaardbaar is.Bij de door mij voorgestelde methode wordt de geijkte kans op een afwijking t gemeten door $(1+t^2)^{-\frac{n}{2}}$ .Tafels zijn overbodig.

Numerieke en Grafische Methoden.

Correlatierekening (Vervolg op Syllabus XV).

Zijn in plaats van twee nu k grootheden $[x_1], \ldots, [x_k]$ gegeven, die gelijktijdig worden gemeten, dan kan men van elk paar de correlatiecoefficient berekenen. We veronderstellen alle grootheden in 't vervolg zo genormeerd, dat hun gemiddelde nul is. Bij elke grootheid $[x_\nu]$ hoort een kolomvector van N waarnemingen; de μ-de waarneming van alle grootheden wordt simultaan gedaan. Voorbeeld: In het μ-jaar wordt bepaald: $[x_1]$ = aardappeloogst, $[x_2]$ = geaccummuleerde temperatuur, $[x_3]$ = geaccummuleerde neerslag. Ander voorbeeld: in een klas worden gegeven een leestest, een spellingtest, een cijfertest, een denksommentest; de uitslagen hiervan zijn de grootheden $[x_1], \ldots, [x_4]$, en wel is de uitslag van zo'n test bij de μ-de leerling de μ-de coordinaat van de bijbehorende vector. Uit de matrix X, waarvan de vectoren x_ν de kolommenzijn, berekent men de matrix

$$X'X = \begin{pmatrix} x_1' x_1 & x_2' x_1 & \cdots & x_k' x_1 \\ x_1' x_2 & x_2' x_2 & \cdots & x_k' x_2 \\ x_1' x_k & x_2' x_k & \cdots & x_k' x_k \end{pmatrix}$$

($x_i' x_k$ = inproduct vectoren x_i, x_k).

Heeft men de grootheden $[x_\nu]$ tevens zo genormeerd, dat de mid. afw. $[x_\nu] = 1$ is, dan staan hier in de hoofdiagonaal énen en op de (ij)-de plaats de correlatie coefficient van i-de en j-de grootheid. X'X heet dan de correlatie-matrix. Det.X'X is trouwens niets anders dan het kwadraat van het k-dimensionale parallelepipedum opgespannen door de k vectoren $x_1, \ldots, x_k$.
Zijn de $[x_1], \ldots, [x_k]$ lineair afhankelijk, dus Xu voor zekere k-dimensionale vector u $\neq$ o, dan is ook X'Xu = O, dus det.X'X= O.
En omgekeerd: is Is er det.X'X = O, dan is er een u $\neq$ o met X'Xu = O, dus ook u'X'Xu = O, dus (Xu)' Xu= O, dus Xu = O, dus lineaire afhankelijkheid.

Men interesseert zich echter nog voor andere coefficienten. B.v. kan men trachten één der grootheden zo goed mogelijk in de overige uit te drukken (b.v. de aardappeloogst in temperatuur en neerslag). Dat doen we precies zo als vroeger bij het vereffenen: We projecteren x_1 op de lineaire deelruimte opgespannen door $x_2, \ldots x_k$; de projectie x_1^* is de "beste" aanpassing van x_1 aan de overige; $x_1 - x_1^*$ is het

"residu";

$$\frac{x_1' \cdot x_1^*}{|x_1| \cdot |x_1^*|} = \cos \text{ hoek } (x_1, x_1^*)$$

heet de multipele correlatie-coefficient tussen $\boxed{x_1}$ en $\boxed{x_2}, \ldots, \boxed{x_k}$. Hij geeft een maat, hoe goed $\boxed{x_1}$ in $\boxed{x_2}, \ldots, \boxed{x_k}$ kan worden uitgedrukt.

Hoe wordt x_1^* (enz.) berekend ? x_1^* is bepaald door de eisen

$x_1^* = \sum_{\nu=2}^{k} \beta_{1\nu} x_\nu$ en $x_1 - x_1^*$ loodrecht op $x_2, \ldots, x_k$,

dus $x_1' \cdot x_i = x_1^{*\prime} \cdot x_i = \sum_{\nu=2}^{k} \beta_{1\nu} x_{\nu i}$

De $\beta_{1\nu}$ zijn dus uit de elementen der correlatie-matrix (of veeleer uit die van de inverse matrix) te berekenen.

Van alle lineaire combinaties van $\boxed{x_2}, \ldots, \boxed{x_k}$ is $\boxed{x_1^*}$ degene, die (op het teken na) het sterkste gecorreleerd is met $\boxed{x_1}$. Men kan $\boxed{x_2}, \ldots, \boxed{x_k}$ uitdrukken in $\boxed{x_1^*}$ en k-1 andere, die in 't geheel niet gecorreleerd zijn met $\boxed{x_1}$ en $\boxed{x_1^*}$.

Deze beschouwingen kunnen als volgt gegeneraliseerd worden: Men heeft twee groepen grootheden $\boxed{x_1}, \ldots, \boxed{x_p}$, $\boxed{y_1}, \ldots, \boxed{y_q}$, die in hun wederzijdse betrekking moeten worden bekeken.
(B.v. de verhouding van de twee taaltests tot de rekentests)....
$x_1, \ldots x_p$ brengen een lineaire deelruimte M voort; analoog $y_1, \ldots y_q$ een N. Men zoekt x in M en y in N zodat hun correlatie maximaal is. Is k x de projectie van y op x en l y die van x op y

(dus $k = \frac{x' \cdot y}{|x|}$, $l = \frac{x' \cdot y}{|y|}$), dan moeten de residuen y-kx en x-ly dus resp. loodrecht op M resp. N zijn:

$$y - k x \perp M \qquad x - l y \perp N.$$

Normeert men $|x| = |y| = 1$, dan wordt $k = l = x'y$, waarvoor we ook λ schrijven. We hebben dan

$$x = \sum_{i}^{p} \alpha_i x_i \quad , \quad y = \sum_{i=1}^{q} \beta_i y_i$$

$$x_j' (y - \lambda x) = 0 \qquad y_k' (x - \lambda y) = 0$$

$$-\lambda \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_j' x_i + \sum_{i=1}^{q} \beta_i x_j' y_i = 0 \quad (j = 1, \ldots p)$$

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_k' x_i - \lambda \sum_{i=1}^{q} \beta_i y_k' y_i = 0 \quad (k = 1, \ldots q)$$

naar $\alpha_1, \ldots \alpha_p$, $\beta_1 \ldots \beta_p$ op te lossen.

Literatuur: H. Hotelling, Relations between two sets of variates. **Biometrika** 28 (1936), 321

Niet triviaal is dit alleen mogelijk, als

$$\begin{vmatrix} -\lambda x_1'x_1 & \cdots & -\lambda x_1'x_p & x_1'y_1 & \cdots & x_1'y_q \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\lambda x_p'x_1 & \cdots & -\lambda x_p'x_p & x_p'y_1 & \cdots & x_p'y_q \\ y_1'x_1 & \cdots & y_1'x_p & -\lambda y_1'y_1 & \cdots & -\lambda y_1'y_q \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_q'x_1 & \cdots & y_q'x_p & -\lambda y_q'y_1 & \cdots & -\lambda y_q'y_q \end{vmatrix} = 0$$

Dit is een (p+q)-de machtsvergelijking voor λ. Zijn λ en λ^* twee wortels, dan zijn x,y en x^*,y^* te vinden met

$$x,\ x^* \text{ in } M\ ;\quad y,\ y^* \text{ in } N$$

en (1) $y - \lambda x \perp M$ (2) $x - \lambda y \perp N$.

(3) $y^* - \lambda^* x^* \perp M$ (4) $x^* - \lambda^* y^* \perp N$.

Vormt men het inwendig product van (1) met x^*, (2) met y^*, (3) met x, (4) met y en vergelijk deze, dan blijkt

$$x^*y - xy^* = xx^*(\lambda - \lambda^*) = -yy^*(\lambda - \lambda^*)$$

$$x^*y + xy^* = xx^*(\lambda + \lambda^*) = yy^*(\lambda + \lambda^*)$$

dus or $\lambda = \pm\lambda^*$ or: $x \perp x^*, y \perp y^*$ en $x \perp y^*$, $x^* \perp y$.

Speciaal volgt hieruit de realiteit van λ en dus ook van x, y, want anders voldeden ook $\bar{\lambda}$, $\bar{x}$, $\bar{y}$ en men zou $\bar{x}'x = 0$ krijgen (enz) wat onmogelijk is (absoluut kwadraatsom $\neq 0$). Met de gebruikelijke methoden volgt hieruit het bestaan van p + q getallen λ_ν en bijbehorende x-en en y-en, thans genaamd u_ν en v_ν, zo dat

$$u_\nu\ v_\nu = \lambda_\nu$$

u_ν in M, v_ν in N,

$u_\mu \perp u_\nu$ voor $\lambda_\mu \neq \pm\lambda_\nu$

$v_\mu \perp v_\nu$ "

$u_\mu \perp v_\nu$ "

Men kan verder de u_ν en v_ν en zo normeren, dat $|u_\nu| = |v_\nu| = 1$ wordt. Men kan de gegeven grootheden $\boxed{x_1}, \ldots, \boxed{x_p}$, $\boxed{y_1} \ldots \boxed{y_q}$ vervangen door lineaire combinaties $\boxed{u_1}, \ldots, \boxed{u_p}$ van de $\boxed{x}$-en en $\boxed{v_1}, \ldots, \boxed{v_q}$ van de $\boxed{y}$-en zodanig, dat alle correlaties tussen verschillende grootheden verdwijnen behalve die tussen een $\boxed{u}$ en $\boxed{v}$ met hetzelfde nummer. De correlatie-matrix van het stel vectoren $(u_1 \cdots u_p\ v_1 \cdots v_p\ v_{p+1} \cdots v_q)$ krijgt dus de vorm (p ≦ q)

$$\begin{pmatrix} I_p & \Lambda & O \\ \Lambda & I_p & O \\ O & O & I_{q-p} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

waar I_p resp. I_q p-resp. q-dim. I-matrices zijn, O nulmatrices, en Λ de p-dim. diagonaal matrix der $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, dus der correlatie-coefficienten van de $\boxed{u_\mu}$ en $\boxed{v_\nu}$ $(\mu=\nu=1,\ldots p)$. De grootste onder hen stelt tevens de grootste mogelijke correlatie tussen M en N voor; de andere zijn stationaire waarden voor de correlatie. (Meetkundig gesproken zijn ze de p hoeken, die de wederzijdse liggingen van M en N kenmerken).

De overgang van de $\boxed{x}$, $\boxed{y}$ naar de $\boxed{u}$, $\boxed{v}$ kan in matrices worden geschreven als

$$\begin{pmatrix} U'U & U'V \\ V'U & V'V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P' & O \\ O & Q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X'X & X'Y \\ Y'X & Y'Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & O \\ O & Q \end{pmatrix},$$

waar links de correlatie-matrix in de vorm (*) staat. Hier is dus

$$U'U = P'(X'X)P \quad , \quad V'V = Q'(Y'Y)Q.$$

Gaat men tot de determinanten over, dan vindt men

$$\det.U'U = (\det P)^2 \det.(X'X), \quad \det.V'V = (\det.Q)^2 \det.Y'Y,$$

$$\det.\begin{pmatrix} U'U & U'V \\ V'U & V'V \end{pmatrix} = (\det P)^2 \ (\det Q)^2 \ \det.\begin{pmatrix} X'X & X'Y \\ Y'X & Y'Y \end{pmatrix},$$

dus is

$$\frac{\det\begin{pmatrix} X'X & X'Y \\ Y'X & Y'Y \end{pmatrix}}{\det(X'X)\ \det(Y'Y)}$$

een invariant, en wel $= (1-\lambda_1^2)(1-\lambda_2^2)\cdots(1-\lambda_p^2)$

Dit getal kan dus rechtstreeks uit de oorspronkelijke correlatie-matrix worden berekend, terwijl de afzonderlijke λ's veel meer rekenwerk vereisem. Als correlatie-maat is het niet geschikt, omdat het juist verdwijnt als een der λ's één is en één wordt, als een der λ's verdwijnt. Men noemt dat getal de (vector-) "alienatie". Als correlatie maat bezigt men het absolute product der . Ook dit is invariant en uit de oorspronkelijke matrix te berekenen, nl.

$$\lambda_1^2 \lambda_2^2 \cdots \lambda_p^2 = \frac{\left|\det\begin{pmatrix} O & X'Y \\ Y'X & Y'Y \end{pmatrix}\right|}{\det(X'X)\ \det(Y'Y)}$$

•p regel 6 staat $\frac{-95}{390}$ lees $\frac{-114}{390}$

" " " " $+\frac{110}{95}$ " $+\frac{132}{390}$.

x_1 en x_2 zijn ongecorreleerde grootheden. Evenzo y_1 en y_2. We onderzoeken de correlatie tussen deze beide paren. Van een stel metingsvectoren x_1, y_1, x_2, y_2 zijn de correlatiecoefficienten als volgt

$$\frac{x_1' y_1}{x_1 \cdot y_1} = +\frac{148}{390} \qquad \frac{x_1' y_2}{x_1 \cdot y_2} = +\frac{51}{390}$$

$$\frac{x_2' \cdot y_1}{x_2 \cdot y_1} = -\frac{95}{390} \qquad \frac{x_2' \cdot y_2}{x_2 \cdot y_2} = +\frac{110}{95}$$

Transformeer op de aangegeven manier de correlatiematrix op de gedaante

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mu \\ \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bepaal de waarde van de invariant van de correlatiematrix, evenals de correlatiemaat.

Een geheel andere visie op deze kwesties is de zogenaamde "factor-analysis". (Literatuur b.v. Holzinger en Harman, Factor Analysis, Chicago 1941). Deze gaat terug op een idee van de psycholoog en statisticus C. Spearman. De grootheden x_1 ,.., x_2 stellen b.v. intellectuele vermogens voor. Men tracht elk te splitsen in een specifieke "faktor" b_i en in een veelvoud $\alpha_i a$ van een algemene "faktor" a (de intelligentie), die in x_i dus in een graad α_i aanwezig is. Uiteraard stelt men de eis dat er tussen a en de b_i en tussen de b_i onderling geen correlatie is, dus

$$x_i = \alpha_i a + b_i \quad , \quad a' b_i = b_i' b_j = 0 \quad (i \neq j)$$

$$x_i' x_j = \alpha_i \alpha_j \quad (i \neq j)$$

Deze laatste vergelijking is in 't algemeen natuurlijk wel exact te bevredigen. Wel bleek Spearman, dat bij alle mogelijk stelselsvan tests (lezen, rekenen, vreemde talen enz.) telkens met grote benadering de kolommen der correlatie-matrix evenredig waren in die zin dat $x_i' . x_j : x_i' . x_k$ $(i \neq j,k)$ onafhankelijk van i waren. Is dit exact het geval, dan kan men de α_i inderdaad overeenkomstig de gestelde eis berekenen. Ze geven dan het aandeel van elk x_i in de (intelligentie)

[a] aan.

Toen de theorie van één algemene faktor niet bleek te voldoen, is men tot een meerfaktor methode overgegaan. De methode is mathematisch nog niet goed uitgewerkt.

Naast de multipele heeft men de partiele correlatiecoefficienten. De bedoeling is, een correlatie tussen $[x_1]$ en $[x_2]$ "na eliminatie van $[x_3]$,...,$[x_k]$ te definieren (b.v. correlatie tussen aardappeloogst en temperatuur na eliminatie van de neerslag). Deze eliminatie geschiedt door alleen met de aandelen van x_1, x_2 loodrecht op $x_3,\dots x_k$ te rekenen. Splitsen we als vroeger x_1 in

$$x_1^* = \sum_{\nu\neq 1} \beta_{1\nu} x_\nu \quad \text{en} \quad x_1 - x_1^* \quad (\perp \text{op } x_2 \cdots x_k)$$

en evenzo $x_2^* = \sum_{\nu\neq 2} \beta_{2\nu} x_\nu$ en $x_2 - x_2^*$ (" " $x_1, x_3 \cdots x_k$) ...

en duiden we de aandelen van x_1, x_2, x_1^*, x_2^* loodrecht op $x_3 \cdots x_k$ door resp. y_1, y_2, y_1^*, y_2^* aan (dus $y_1,\dots,y_2^*$ = projecties van $x_1,\dots,x_2^*$ op orth. complement van $x_3,\dots,x_k$), dan geldt

$$y_1^* = \beta_{12} y_2 \quad , \; y_1 - y_1^* \quad \text{loodrecht op } x_2$$

$$y_2^* = \beta_{21} y_1 \quad , \; y_2 - y_2^* \quad \text{loodrecht op } x_1$$

De correlatie-coefficient van $[y_1]$ en $[y_2]$ is dus $\pm\sqrt{\beta_{12}\,\beta_{21}}$ (met het tekenvan β_{12}). Dit is dan de partiele correlatiecoefficient van $[x_1]$ en $[x_2]$ na eliminatie van de overige. (G.U. Yule).

Kritiek op de correlatie-coefficienten. De naam is zeer ongeschikt gekozen. De correlatie-coefficient meet eigenlijk niet het verband tussen twee (of meer) grootheden, maar de mate, waarin dit verband lineair kan worden benaderd. Bestaat tussen $[x]$ en $[y]$ een stricte maar niet lineaire afhankelijkheid, dan kan de correlatie-coefficient klein of zelfs nul worden. Als maat voor de correlatie kan de correlatie-coefficienten alleen dan gelden, als de regressie ongeveer lineair, d.w.z. als de kromme regressielijnen ongeveer samen vallen met de regressie-rechten. Is dit niet het geval, dan meet men de correlatie beter door de

<u>Correlatieverhouding</u> (correlation ratio).

Bij elke meting van $[x]$ hoort één van $[y]$, maar niet bij elke waarde van $[x]$ maar één van $[y]$. De mogelijke waarden van $[x]$ zijn ξ_μ; bij elke ξ_μ behoren zekere waarden $\eta_{\mu\nu}$ van $[y]$ (elk met zekere multipliciteit). De geobserveerde combinaties zijn dus $\xi_\nu, \eta_{\mu\nu}$. Vroeger hebben we als "ideale" metingen, waarvan deze aangepast moet worden, die met lineair verband genomen. Thans beschouwen we algemener als

ideaal verband het willekeurig functioneel verband. Dus ideale meting is die, waarbij bij elke ξ_ν precies één η_ν hoort. De ruimte waarin we werken, heeft dan zoveel dimenties als er [x], [y] zijn. Een stel metingen $\eta_{\mu\nu}$ stelt een punt van die ruimte voor. Bij een ideaal stel metingen is $\eta_{\mu\nu}$ onafhankelijk van μ. De ideale stellen vormen een lineaire deelruimte. Hierin moeten we dat punt zoeken, dat de kleinste afstand van het werkelijke stel metingen $\eta_{\mu\nu}$ bezit, dus we moeten $\eta_{.\nu}$ zo bepalen dat

$$\sum_{\mu\nu} (\eta_{\mu\nu} - \eta_{.\nu})^2$$

minimaal wordt. Dat geschiedt, als elk summand minimaal wordt, dus als $\eta_{.\nu}$ het gemiddelde van de $\eta_{\mu\nu}$ is (voor elke ν). De ($\xi_\nu, \eta_{.\nu}$) liggen dan (in het x-y-vlak bekeken) op een kromme regressie-lijn. Als maat voor de aanpassing dient weer de cosinus van de hoek φ tussen oorspronkelijke en aangepaste vector; als nulpunt nemen we weer dat stel metingen, waarbij aldoor η = gem. [y] uitkomt, dus

$$\sin^2\varphi = \frac{\sum_{\mu\nu} (\eta_{\mu\nu} - \eta_{.\nu})^2}{\left(\sum_{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} - \eta\right)^2}$$

(in de teller staat het afstandkwadraat "werkelijk ideaal metingstel", in de noemer het afstandkwadraat "werkelijk metingstel - oorsprong"). Nu is

$$\sum_{\mu\nu} (\eta_{\mu\nu} - \eta)^2 = \sum \left[(\eta_{\mu\nu} - \eta_{.\nu}) + (\eta_{.\nu} - \eta)\right]^2 =$$

$$\sum_{\mu\nu} (\eta_{\mu\nu} - \eta_{.\nu})^2 + \sum_{\nu} \underbrace{\sum_{\mu} (\eta_{\mu\nu} - \eta_{.\nu})}_{\text{nul}} (\eta_{.\nu} - \eta) + \sum p_\nu (\eta_{.\nu} - \eta_\nu)^2$$

waarbij het gewicht p_ν aangeeft het aantal $\eta_{\mu\nu}$ -en (voor elke ν). Dus

$$\cos^2\varphi = \frac{\sum p_\nu (\eta_{.\nu} - \eta)^2}{\sum_{\mu\nu} (\eta_{\mu\nu} - \eta)^2}$$

$$= \frac{\text{mid.afw. van de } \eta_{.\nu} \text{ -en}}{\text{mid.afw. van de } \eta_{\mu\nu} \text{ -en}}$$

(op een coefficient na).

$\cos\varphi$ is de correlatie-verhouding ϑ_{xy}. Ze wordt dan en slechts dan 1 als alle $\eta_{\mu\nu} = \eta_{.\nu}$ dus onafhankelijk van μ zijn, dus bij stricte afhankelijkheid.

Om de correlatie-verhouding met de correlatie-coefficient te vergelijken, hoeft men er alleen om te denken, dat de ideale deelruimte

bij de $\mathcal{C}.\mathcal{V}.$ groter is, dan bij de $\mathcal{C}.\mathcal{C}.$; de afstand tussen werkelijk en ideaal metingstel wordt dus bij de $\mathcal{C}.\mathcal{V}.$ kleiner dan bij de $\mathcal{C}.\mathcal{C}.$, de cosinus van de beschouwde hoek dus bij de $\mathcal{C}.\mathcal{V}.$ groter dan bij de $\mathcal{C}.\mathcal{C}.$. D.w.z. de $\mathcal{C}.\mathcal{V}.$ is (absoluut genomen) steeds groter dan of gelijk aan de $\mathcal{C}.\mathcal{C}.$. Bij lineaire regressie vallen beide (absoluut) samen. Derhalve pleegt men de afwijking van de lineariteit te meten door $(\mathcal{C}.\mathcal{V}.)^2 - (\mathcal{C}.\mathcal{C}.)^2$.

Kritiek op de correlatieverhouding. De $\mathcal{C}.\mathcal{V}.$ meet de benaderde van het functioneel verband; haast bij elke $\boxed{x}$ -waarde precies één $\boxed{y}$ -waarde, dan bereikt de $\mathcal{C}.\mathcal{V}.$ zijn maximum. Maar dit functioneel verband zou zo grillig kunnen zijn, dat we in de praktijk toch van geen afhankelijkheid zouden spreken; dit doen over 't algemeen alleen dan als het functieverloop enigszins gâld is. (waarbij men niet meteen aan lineariteit hoeft te denken). Hiermee houdt de $\mathcal{C}.\mathcal{V}.$ in 't geheel geen rekening. De waarden ξ_ν spelen zelfs geen rol; men kan ze willekeurig door elkaar gooien, als de groepen $\eta_{\mu\nu}$ (voor elke vaste ν) maar bij elkaar blijven. In gevallen, waar de waarden der ξ_ν geen essentiele betekenis hebben en het enkel op de indeling in zekere groepen aankomt, is de $\mathcal{C}.\mathcal{V}.$ dan ook een aangewezen middel. Voorbeeld: Men moet verschillende productiemethoden met elkaar vergelijken. Herhaalde toepassing van de methode nummer ν levert de opbrengsten $\eta_{\mu\nu}$ (voor elke ν). Is er tussen die methoden een significant verschil ? De $\mathcal{C}.\mathcal{V}.$ geeft hierop een antwoord in die zin, dat hij als het ware een correlatie tussen het nummer $\boxed{x}$ van de productie-methode en de opbrengst $\boxed{y}$ tracht te constateren. Een bij de biologen zeer populaire en vooral door R.A. Fisher uitgewerkt systeem, dat op de $\mathcal{C}.\mathcal{V}.$ is gebaseerd, is de z.g. variante analyse. (hierover aanstonds nog iets).

Bij de toepassing van de $\mathcal{C}.\mathcal{V}.$ moet men ervoor zorgen, dat er werkelijk groepen zijn, dus dat bij elke ξ_ν een aantal $\eta_{\mu\nu}$ horen. EvH. moet men ξ_ν-en samenvatten, Zijn er precies twee groepen, resp. met de gemiddelden $\eta_{.1}$ en $\eta_{.2}$ dan wordt $\eta = \frac{p_1\eta_{.1} + p_2\eta_{.2}}{p_1 + p_2}$ de teller van de $(\mathcal{C}.\mathcal{V}.)^2 = p_1(\eta_{.1}-\eta)^2 + p_2(\eta_{.2}-\eta)^2 = \frac{p_1 p_2}{p_1+p_2}$

Afgezien van een coefficient, die met p_1 en p_2 samenhangt, is dus $\mathcal{C}.\mathcal{V}.$ niets anders dan het verschil der gemiddelden, gedeeld door de mid.afw. van het geheel, dus een grootheid, die we vroeger al bezigden, om te constateren, of we het verschil tussen twee gemiddelden significant is. Op een dergelijke wijze gaat men ook te werk in de

<u>Variantie-analyse</u>.

$\eta_{\mu\nu}$ zijn N observatiegegevens, die in g groepen zijn verdeeld; de index ν is het nummer van de groep, η is hun gemiddelde. De gehele

"variantie"

(1) $$\sum_{\mu\nu} (\eta_{\mu\nu} - \eta_{..})^2$$

wordt gesplitst in

$$\sum_{\mu\nu} (\eta_{\mu\nu} - \eta_{.\nu})^2 + \sum_{\nu} p_\nu (\eta_{.\nu} - \eta)^2$$

(2) (3)

In plaats van (1) en (3) worden nu de bijbehorende mid. afw. beschouwd, d.w.z. (1) wordt door $N-1$ en (2) door Ng gedeeld.
Het quotient

$$Q = \frac{\frac{1}{g-1} \sum_{\nu} p_\nu (\eta_{.\nu} - \eta_{..})^2}{\frac{1}{N-g} \sum_{\mu\nu} (\eta_{\mu\nu} - \eta_{.\nu})^2}$$

bezit nu, indien $\xi_{\mu\nu}$ -en normaal verdeelde toevallige grootheden zijn, een distributie-wet, die een generalisatie van χ^2 en "Student" is. I.p.v. dit quotient beschouwt Fisher $\frac{1}{2} \log Q$. Voor de distributie van Z bestaan tafels, die analoog de χ^2 worden gebruikt om significantie te constateren.

<u>Square Contingency</u> (Pearson). Ook dit is een soort correlatie-maat, die op geheel andere overwegingen berust. Men gaat net van de tegengestelde kant uit, nl. van onafhankelijkheid i.p.v. afhankelijkheid.

Een bevolking van N individuen is in groepen verdeeld volgens twee criteria, b.v. in gewichtsklassen A_μ en lengteklassen B_ν ; het relatieve aantal individuen, die zowel in A_μ als ook in B_ν zijn, is $p_{\mu\nu}$ (dus $\sum p_{\mu\nu} = 1$); het aantal in klasse A_μ is dus $p_{\mu.} = \frac{p_{\mu\nu}}{p_{.\nu}}$ dat in B_ν $p_{.\nu} = \sum_\mu p_{\mu\nu}$. In het geval van onafhankelijkheid tussen gewicht en lengte zou het aandeel van A_μ -en in elk der klassen B_ν hetzelfde moeten zijn als in de gehele bevolking, dus $p_{\mu.} = \frac{p_{\mu\nu}}{p_{.\nu}}$ of $p_{\mu\nu} = p_{\mu.}\, p_{.\nu}$. In werkelijkheid zal er een verschil tussen $p_{\mu\nu}$ en $p_{\mu.}\, p_{.\nu}$ zijn. Dit verschil wordt uu op bekende wijze gemeten door een χ^2 , nl.

$$N \sum \frac{(p_{\mu\nu} - p_{\mu.}\, p_{.\nu})^2}{p_{\mu.}\, p_{.\nu}} \qquad \text{(Square contingency)}$$

Uit χ^2 -tafel (vrijheidsgraad = aantal minus één) stelt men de overschrijdingskans vast, dus de kans erop, dat de afwijking tussen de $p_{\mu\nu}$ en de $p_{\mu.}\, p_{.\nu}$ op een toeval berust. Men lette er op dat dit

niet de afwijking tussen het $P_{\mu\nu}$-stel en de stellen met onafhankelijkheid zonder meer is, maar de afwijking tussen het $P_{\mu\nu}$-stel en een speciaal stel met onafhankelijkheid , nl. het stel $P_{\mu\cdot} P_{\cdot\nu}$, dat echter inderdaad een bijzondere voorkeur verdient.

De square centingency is vooral effectief in de buurt van onafhankelijkheid. Het is minder juist, haar toe te passen als maat voor afhankelijkheid, dus als een soort correlatie-coefficient.

Cursus Numerieke en Graphische Methoden.

Schema van Horner.

Gegeven is een veelterm

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_0 .$$

Te berekenen f(p)! Algemener wordt gevraagd de deling door $x-p$ uit te voeren d.w.z. f(x) voor te stellen als

$$f(x) = f_1(x)\,(x-p) + f(p)$$

Schema (in stappen uitgelegd):

(1)	f(x):	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_1	a_0
(2)	f(x):	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_1	a_0
		a_n				
(3)	f(x):	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_1	a_0
			$a_n \cdot p$			
		a_n				

(de schuine pijl duidt altijd een vermenigvuldiging met p aan).

(4)	f(x):	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_1	a_0
			$a_n \cdot p$			
		a_n	a'_{n-1}			

(de verticale pijl geeft een optelling aan).

(5)	f(x):	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_1	a_0
			$a_n \cdot p$	$a'_{n-1}\ p$		
		a_n	a'_{n-1}			
(6)	f(x):	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_1	a_0
			$a_n \cdot p$	$a'_{n-1} \cdot p$		
		a_n	a'_{n-1}	a'_{n-2}		

(2n-1)	f(x):	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	·····	a_1	a_0
			$a_n \cdot p$	$a'_{n-1} \cdot p$		$a'_2 \cdot p$	
		a_n	a'_{n-1}	a'_{n-2}	·····		
(2n)	f(x):	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	·····	a_1	a_0
			$a_n \cdot p$	$a'_{n-1} \cdot p$		$a'_2 \cdot p$	
		a_n	a'_{n-1}	a'_{n-2}		a'_1	
(2n+1)	f(x):	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	·····	a_1	a_0
			$a_n \cdot p$	$a'_{n-1} \cdot p$	·····	$a'_2 \cdot p$	$a'_1 p$
		a_n	a'_{n-1}	a'_{n-2}	·····	a'_1	
(2n+2)	f(x):	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	·····	a_1	a_0
			$a_n \cdot p$	$a'_{n-1} \cdot p$	·····	$a'_2 \cdot p$	$a'_1 \cdot p$
	$f_1(x)$:	a_n	a'_{n-1}	a'_{n-2}	·····	a'_1	$f(p)$

De zin van de laatste regel is die, dat de $a_n, \cdots a'_1$ de coefficienten van $f_1(x)$ voorstellen, terwijl de laatste term $f(p)$ is. Dit kan gemakkelijk als volgt worden geverifieerd. De laatste regel

$$a_n \quad a'_{n-1} \quad a'_{n-2} \quad \cdots\cdots \quad a'_1 \quad a'_0$$

kan worden opgevat als coefficientenschema van een functie

$$f_1(x) \cdot x + a'_0 \quad ;$$

de voorlaatste is dat van $f_1(x) \cdot p$. Laatste - minus voorlaatste regel geeft dat van $f(x)$. Dus

$$f_1(x)\ (x-p) + a'_0 = f(x)$$

Dus is $f_1(x)$ het gevraagde quotient en $a'_0 = f(p)$.

Op $f_1(x)$ kan men hetzelfde proces toepassen:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = (x-p)\ f_1(x) + f(p) \\ f_1(x) = (x-p)\ f_2(x) + f_1(p) \\ - - - - - - - - - - - - - - \\ - - - - - - - - - - - - - - \\ f_{n-1}(x) = (x-p)\ f_n(x) + f_{n-1}(p) \end{array}\right\} \quad (*)$$

Dit leidt tot een driehoekig schema:

$f(x)$:	a_n	a_{n-1}	.....	a_2	a_1	a_0
		$*$		$*$	$*$	$*$
$f_1(x)$:	a_n	a'_{n-1}	.....	a'_2	a'_1	$\lfloor f(p)$
		$*$		$*$	$*$	
$f_2(x)$:	a_n	a''_{n-1}	.....	a''_2	$\lfloor f_1(p)$	
		$*$		$*$		
$f_3(x)$:	a_n	a'''_{n-1}		$\lfloor f_2(p)$		
- - - - - - - - - - - - - -

g(y) zal dan betrekkelijk klein zijn, en daarom kan men in

$$b_n y^n + b_{n-1} y^{n-1} + \cdots\cdots + b_1 y + b_o = 0$$

de machten van y vanaf de tweede verwaarlozen. y zal dus approximatief zijn

$$y \sim -\frac{b_1}{b_o} = q$$

(Eventueel kan men ook met hogere machten van y rekening houden). Nu transformeert men opnieuw

$$g(y) = h(z) \quad \text{met } y - q = z$$

volgens Horner en gaat zo door tot de gewenste nauwkeurigheid is bereikt Van de verkregen wortel rekent men terug tot die van f(x).

<u>Voorbeeld</u>. $x^5 - 5 \cdot x - 7 = 0$. Er is precies één reele wortel (waarom?). Deze ligt vlakbij 1. Voer de berekening niet te schematisch door en begin dus niet bepaald bij 1 ! Bereken de wortel op drie decimalen nauwkeurig !

Generalisatie: Voert men de door een schuine pijl aangeduide operatie uit als een vermenigvuldiging met een telkens veranderde p, d.w.z. bij de stap (2v+1) met $p = x_{v+1}$, dan leveren de getallen in de hokjes samen met a_n successievelijk de coefficienten in de ontwikkeling

$$f(x) = A_c + A_1 (x-x_o) + A_2 (x-x_o)(x-x_1) + \cdots + A_n(x-x_o)(x-x_1)\cdots(x-x_{\ldots}$$

Dit leidt tot het vraagstuk van de

<u>Interpolatie</u>.

We stellen

$$f_1(x) = \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

$$f_2(x) = \frac{f_1(x) - f_1(x_1)}{x - x_1}$$

enz.

Is f(x) van de graad n, dan is $f_n(x)$ een constante. Hierbij is $f_i(x_i)$ hetzelfde als A_i boven.

Is f bekend voor $x - x_i$ $(i = 0, \ldots, n)$ dan kunnen we bovenstaande ontwikkeling berekenen door differentiequotienten te vormen:

x	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	.....	$f_n(x)$
x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f_1(x_1)$			
x_2	$f(x_2)$	$f_1(x_2)$	$f_2(x_2)$		
x_n	$f(x_n)$	$f_1(x_n)$	$f_2(x_n)$		$f_n(x_n)$

Elke kolom uit dit schema (vanaf de derde) ontstaat uit de voorafgaande door het vormen van differentiequotienten. In de diagonaal staan dan de gevraagde coefficienten A_i. De differentiequotienten zijn altijd gevormd t.o.v. de hoogststaande term in een kolom.

De berekening van f(x) voor een bepaalde x geschiedt met een gewijzigd Horner-schema:

$A_n \qquad A_{n-1} \qquad A_{n-2} \qquad\qquad A_1 \qquad\qquad A_0$

$A_n(x - x_{n-1}) \quad | \quad A'_{n-1}(x - x_{n-2}) \quad \cdots\cdots \quad | \quad A'_2(x - x_1) \quad | \quad A'_1(x - x_0)$

$A'_{n-1} \qquad\qquad A'_{n-2} \qquad\qquad A'_1 \qquad\qquad f(x)$

Voor aequidistante $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ bedient men zich beter van de volgende methode:

$$x_{i+1} - x_i = \Delta x \qquad (i = 0,1,2,\cdots)$$

$$x - x_i = x + \Delta x - x_{i+1} \qquad (i = 0,1,2,\cdots)$$

Zij $\varphi(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots\cdots(x-x_m)$. Dan is

$$\varphi(x + \Delta x) = (x + \Delta x - x_0)(x + \Delta x - x_1)\cdots\cdots(x + \Delta x - x_m)$$

$$= (x + \Delta x - x_\bullet)(x - x_0) \cdots\cdots (x - x_{m-1})$$

zodat

$$\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = (x_m + \Delta x - x_0)(x - x_0)\cdots (x - x_{m-1})$$

$$\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = (m + 1)\,\Delta x \cdot (x - x_0) \cdots (x - x_{m-1})$$

$$\varphi'(x) = \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = (m+1)(x-x_0)\cdots(x - x_{m-1})$$

(en dus de"hoogste" term valt weg). Is

$$f(x) = A_0 + A_1 (x-x_0) + A_2 (x-x_0)(x-x_1)+\ldots\ldots+ A_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

dan is

$$f_1(x)\ A_1 + 2A_2 (x-x_0) + 3A_3(x-x_0)(x-x_1)+\cdots$$

$$f_2(x) = 2A_2 + 3\cdot 2A_3 (x-x_0)(x-x_1)+\cdots$$

dus

$$A_0 = f(x_0)$$

$$A_1 = f_1(x_0)$$

$$A_2 = \frac{f_2(x_0)}{2!}$$

$$A_i = \frac{f_i(x_0)}{i!}$$

Men vormt dus het volgende schema:

x	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
x_0	$f(x_0)$			
		$f_1(x_0)$		
x_1	$f(x_1)$		$f_2(x_0)$	
		$f_1(x_1)$		$f_3(x_0)$
x_2	$f(x_2)$		$f_2(x_1)$	
		$f_1(x_2)$		$f_3(x_1)$
x_3	$f(x_3)$		$f_2(x_2)$	
		$f_1(x_3)$		
x_4	$f(x_4)$			

We hebben hier de differentiequotienten telkens op de regel tussen die termen geplaatst, waaruit zij gevormd zijn. De $f_i(x_0)$ stonden hierdoor op een schuine lijn. Het is voldoende de differenties op te schrijven en achteraf door $\triangle x$ te delen; ook is het vaak doelmatig $\triangle x$ als eenheid te nemen.

Voor controle vorme men ook de sommen in de kolommen !

Op deze methode zijn er veel variaties. B.v. is om symmetriere-denen vaak doelmatig een ontwikkeling volgens

$$x_{-m} < x_{-m+1} < \cdots\cdots < x_0 < x_1 < \cdots x_m$$

in de vorm

$$f(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)(x-x_{-1}) + A_3(x-x_0)(x-x_{-1})(x-x_1) + \cdots\cdots$$

$$f_1(x) = A_1 + 2A_2(x-x_{-1}) + 3A_3(x-x_0)(x-x_{-1}) + 4A_4(x-x_0)(x-x_1)(x-x_{-2}) + \cdots$$

$$f_2(x) = 2A_2 + 3\cdot 2\cdot A_3(x-x_{-1}) + 4\cdot 3\cdot A_4(x-x_{-1})(x-x_{-2}) + \cdots\cdots$$

$$f_3(x) = 3\cdot 2\cdot A_3 + 4\cdot 3\cdot 2\cdot A_4(x-x_{-2}) + \cdots\cdots$$

Om de coefficienten A_i te bepalen, moet men dus de differentie-quotienten vormen:
0^{de} bij x_0, 1^{ste} en 2^{de} bij x_{-1}, 3^{de} en 4^{de} bij x_{-2} enz.

x	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
$\vdots$				
x_{-2}	$f(x_{-2})$			
		$f_1(x_{-2})$		
x_{-1}	$f(x_{-1})$		$f_2(x_{-3})$	
		$f_1(x_{-1})$		$f_3(x_{-3})$
x_0	$f(x_0)$		$f_2(x_{-2})$	
		$f_1(x_0)$		$f_3(x_{-2})$
x_1	$f(x_1)$		$f_2(x_{-1})$	
		$f_1(x_1)$		$f_3(x_{-1})$
x_2	$f(x_2)$		$f_2(x_0)$	

De pijlen geven de rij coefficienten, die men uit het schema moet overnemen. Algmeen geldt: Wil men ontwikkelen volgens

$$f(x) = A_0 + A_1(x - x_{v_0}) + A_2(x - x_{v_0})(x - x_{v_1}) + \cdots\cdots$$

met $v_{i+1} - v_i = \pm 1$, dan moet men bij $v_{i+1} < v_i$ in het schema omhoog, bij $v_{i-1} < v_i$ omlaag. Nog symmetrischer wordt de voorstelling, als men behalve de rij ↗ ↘ ↗ ↘ nog de rij ↘ ↗ ↘ ↗ beschouwt en dus het gemiddelde vormt

$$f(x) = A_o + A_1(x-x_o) + A_2(x-x_o)(x-\frac{x_1+x_{-1}}{2}) + A_3(x-x_o)(x-x_1)(x-x_{-1}) + \cdots$$

(waarin $\frac{x_1+x_{-1}}{2} = x_o$). En wel is dan

$$A_\bullet = \frac{1}{\bullet\,!}\ f(x_o)$$

$$A_1 = \frac{1}{1!\ 2!}\ (f_1(x_{-1}) + f_1(x_o))$$

$$A_2 = \frac{1}{2!}\ f_2(x_{-1})$$

enz.

Vorm nu uit het vorige schema het volgende deelschema

	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$
x_c	$f(x_o)$	$f_1(x_{-1})$	$f_2(x_{-1})$	$f_3(x_{-2})$
		$f_1(x_1)$		$f_3(x_{-1})$

Hierbij is $\{i\}$ gelijk aan het getal uit de overeenkomstige kolom van het deelschema. Waar twee getallen in een kolom staan is hun gemiddelde te nemen. Met deze notatie krijgen we voor $x - x_o = u$, $x_{i+1} - x_i = \triangle$ dan de volgende formule

$$f(x) = \{0\} + \{1\}\ \frac{u}{1!} + \{2\}\ \frac{u^2}{2!} + \{3\}\ \frac{u(u+\triangle)(u-\triangle)}{3!} +$$

$$\{4\}\ \frac{u^2(u+\triangle)(u-\triangle)}{4!} + \{5\}\ \frac{u(u+2\triangle)(u+\triangle)(u-\triangle)(u-2\triangle)}{5!}$$

N.B. Voor de functie $\frac{u(u-1)}{2!}$ enz. bestaan tafels.

Een geheel ander, voor het rekenen met rekenmachines en vooral met ponskaarten-machines vermoedelijk bijzonder geschikt procédé, is het volgende afkomstig van A.C. Aitken: On interpolation by iteration of proportional parts without the use of differences. (Proc. of the Edinburgh Math. Soc. (1932) 3, 2 blz 56-76).

Hierbij wordt voortgezet lineair geinterpoleerd. De $x_o, x_1, \cdots$ behoeven niet aequidistant te zijn. Het idee is het volgende. We noemen

$$f_{i_o i_1 \cdots i_p}$$

de p-de-graads functie, die in x_{i_0}, x_{i_1},···, x_{i_p} de voorgeschreven

waarden heeft· Dan kan men uit

$$f_{i_0 i_1 \cdots i_p\ j} \quad \text{en} \quad f_{i_0 \cdots i_p\ k}$$

berekenen

$$f_{i_0 i_1 \cdots i_p\ j\ k} = f_{i_0 i_1 \cdots i_p}\ \frac{x-x_k}{x_j-x_k} + f_{i_0 i_1 \cdots i_p\ k}\ \frac{x_j-x}{x_j-x_k} \quad (*)\ .$$

In x_{i_v} $(v = 0,\cdots p)$ voldoet deze functie omdat $f_{i_0 \cdots i_p\ j}$ en $f_{i_0 \cdots i_p\ k}$ daar voldoen, en in x_j en x_k voldoet zij, zoals men door substitutie kan zien·

De bedoeling is $f_{01 \cdots n}$ te berekenen· Men gaat volgens het navolgend schema te werk (we schrijven alleen het stel indices op, en laten het teken f weg)·

1· v (de functie f_v is de constante met de in x_v voorgeschreven waarde)·
2· o & v ⟶ ov (met formule (*))·
3· (01) & (ov) ⟶ (01v) (met formule (*))·
4· (012) & (01v) ⟶ (012v) (" " ")

enz·

Liggen de x_i in een even aantal symmetrisch t·o·v·o·, dus $x_v = -x_{-v}$ dan kan men beter als volgt rangschikken:

1· v
2· v & − v ⟶ ± v
3· ± 1 & ± v ⟶ (± 1 ± v)
4· (± 1 ± 2) & (± 1 ± v) ⟶ (± 1 ± 2 ± v)

enz·

De eerste stap is weer als vroeger, de tweede eveneens· De volgende geschieden volgens quadratische interpolatie:

$$f_{\cdots\cdots \pm\ j\ \pm\ k} = f_{\cdots\cdots \pm\ j}\ \frac{x^2 - x_k^2}{x_j^2 - x_k^2} + f_{\cdots\cdots \pm\ k}\ \frac{x_j^2 - x^2}{x_j^2 - x_k^2}$$

Liggen de x_i in oneven aantal symmetrisch t·o·v·o· dus $x_o = 0$ $x_v = -x_{-v}$, dan vormt men

1• v
2• 0 & v → (0v)
3• (0v) & (0-v) → (0±v)
4• (0±1) & (0±v) → (0±1±v)

enz•

Voor het berekenen der formule van f(x) is deze methode minder geschikt, maar wel is zij goed bruikbaar voor het numerieke interpoleren•

Interpolatie wordt niet alleen op gehele rationale functies toegepast, maar juist vooral op algemene functies b•v• om tafels uit te breiden• Hogere differenties kunnen hierbij spoedig verwaarloosd worden, ten eerste omdat ze steeds onnauwkeuriger worden, ten tweede omdat hun invloed klein is•

Voorbeeld•

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

x	f(x)		
2,0	0,97725		
		489	
2,1	0,98214		93
		396	
2,2	0,98610		78
		318	
2,3	0,98928		66
		252	
2,4	0,99180		53
		199	
2,5	0,99379		44
		155	
2,6	0,99534		36
		119	
2,7	0,99653		28
		91	
2,8	0,99744		22
		69	
2,9	0,99813		17
		52	
3,0	0,99865		

Opgave: Bereken met verschillende methoden de functiewaarde voor x = 2,53 •

Cursus Numerieke en Grafische Methoden.

Differential Analysers.

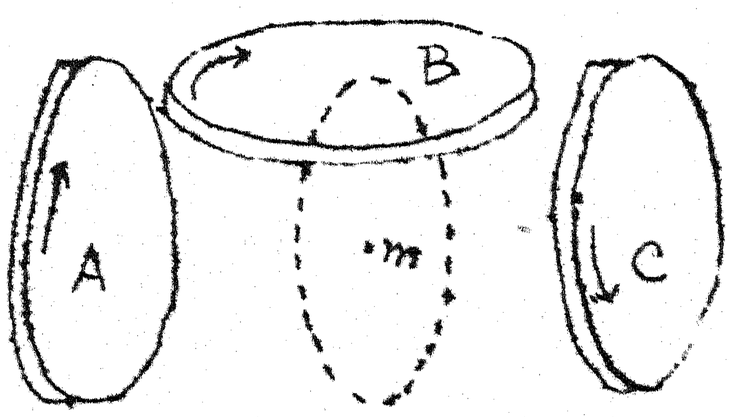
Literatuur:

J. Thomson en W. Thomson,	Journ.Roy.Soc. 24 (1876), 262-275.
V. Bush,	Journ.Franklin Inst. 212 (1931) 447-488.
D.R. Hartree,	Math.Gazette 12 (1938), 342-364.
H.S.W. Massey e.a.,	Proc.Roy.Irish Acad. 45(1938) 1-22.
D.R. Hartree, A.Porter,	Memoirs Manchester 79(1934), 51.
O'Amble,	Journ.Scientific Instrum. 23 (1946), 284.
V. Bush e.a.,	Journ.Franklin Inst. 240(1945), 255-326.
J. Crank,	The Differential Analyser, 1947.
F.J. Murray,	The Theory of Mathematical Machines, New-York, Revised ed. 1947-48.
W. Meyer zur Capellen,	Math. Instrumente, Leipzig 1944 2.Aufl.

Voor de realisering van mathematische grootheden zijn er twee uiteenlopende beginselen:

1. Discontinue realisering (cijfermachines);
2. continue realisering.

In het tweede geval stelt men mathematische grootheden voor door lengten, snelheden, stroomsterkten, potentialen, lichtsterkten enz. Optellen en aftrekken van rotaties geschiedt b.v. met de zogenaamde differentiaal.



Beginsel hiervan: Drie even grote cirkelschijven A,B,C (in werkelijkheid b.v. kroonraderen), met B loodrecht op C, delen door aanraking de bewegingen aan elkaar mee (zonder te slippen). A en C zijn draaibaar om hun assen. De as van B is in m vastgemaakt en kan in een vlak evenwijdig aan de vlakken van A en C wentelen, zodat het middelpunt van B de gestippelde cirkel beschrijft. Bovendien kan B in zijn vlak om zijn middelpunt draaien. De als positief beschouwde draairichtingen zijn door pijlen aangegeven. Zij φ de draaihoek van B in zijn vlak, ψ die

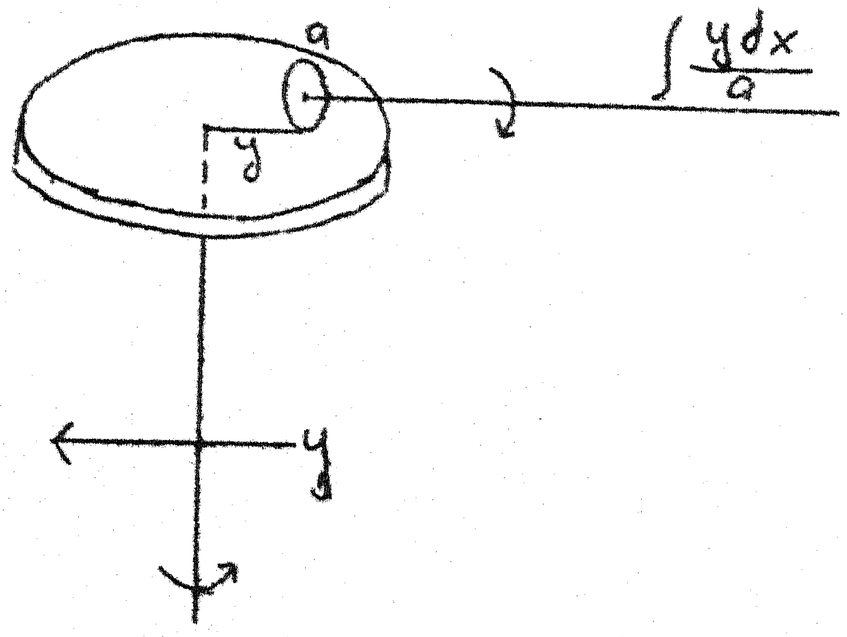
van het middelpunt van B op de gestippelde cirkel. De toestand van B wordt dus door twee coördinaten φ en ψ beschreven. Draait B in zijn vlak over φ (onder vasthouding van dat vlak) dan draaien A en C eveneens over φ. Draait de as van B over ψ, dan draaien A en C resp. over ψ en $-\psi$.

A	B	C
φ	$(\varphi, 0)$	φ
ψ	$(0, \psi)$	$-\psi$
$\varphi+\psi$	(φ, ψ)	$\varphi-\psi$

Schrijft men bewegingen α en β van A en C voor, dan wordt $\psi = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ De beweging van de as van B wordt als uitkomst beschouwd. Het optreden van de factor $\frac{1}{2}$ en van het min-teken is natuurlijk niet essentieel.

Vermenigvuldigen van een grootheid met een positieve of negatieve constante is natuurlijk gemakkelijk door tandraderen enz. te realiseren.

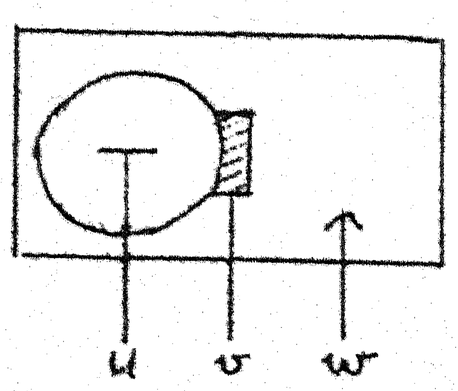
Het hoofdidee van de Differential Analyser is de integrator-eenheid. Het is afkomstig van Thomson(broer van Lord Kelvin).



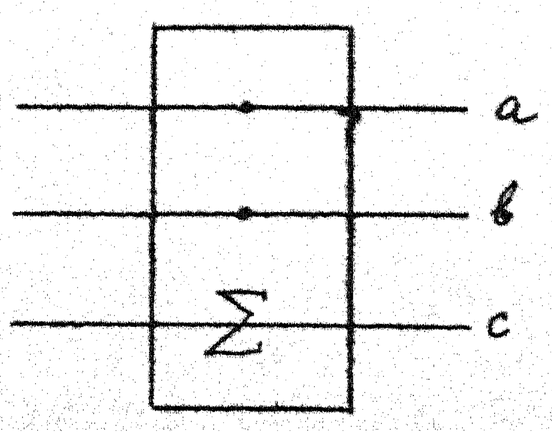
De horizontale schijf kan om zijn as roteren; het vlak van die schijf is vast, maar de as zit in een wagen die in de richting van de pijl kan worden verschoven. Het verticale wieltje (integratorwiel), draait in een vast vlak. Een rotatie dx van de schijfas veroorzaakt een rotatie $\frac{y\,dx}{a}$ van de integratorwiel-as; y is door de beweging van de wagen variabel(een schroef zet een draaibeweging y in een translatie om). Aan een draaiing $\alpha \leqq x \leqq \beta$ van de schijfas beantwoordt de draaiing $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{y\,dx}{a}$ van de integratorwiel-as.

Symbolen.

Symbool voor de integratoreenheid:

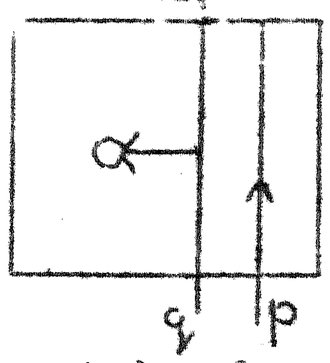


Symbool voor de opteleenheid:



Een gegeven functie wordt ingevoerd met een z.g. input-table. De grafiek is op een brug gemonteerd. Met de handle wordt een stift (open cirkel in tekening) gedwongen op de grafiek te blijven. De beweging van de handle wordt overgedragen op f(z) en verder op z(d.w.z. de brug krijgt een translatiebeweging in de richting van de z-as).

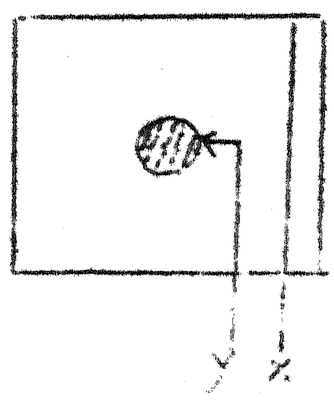
Symbool voor input-table:



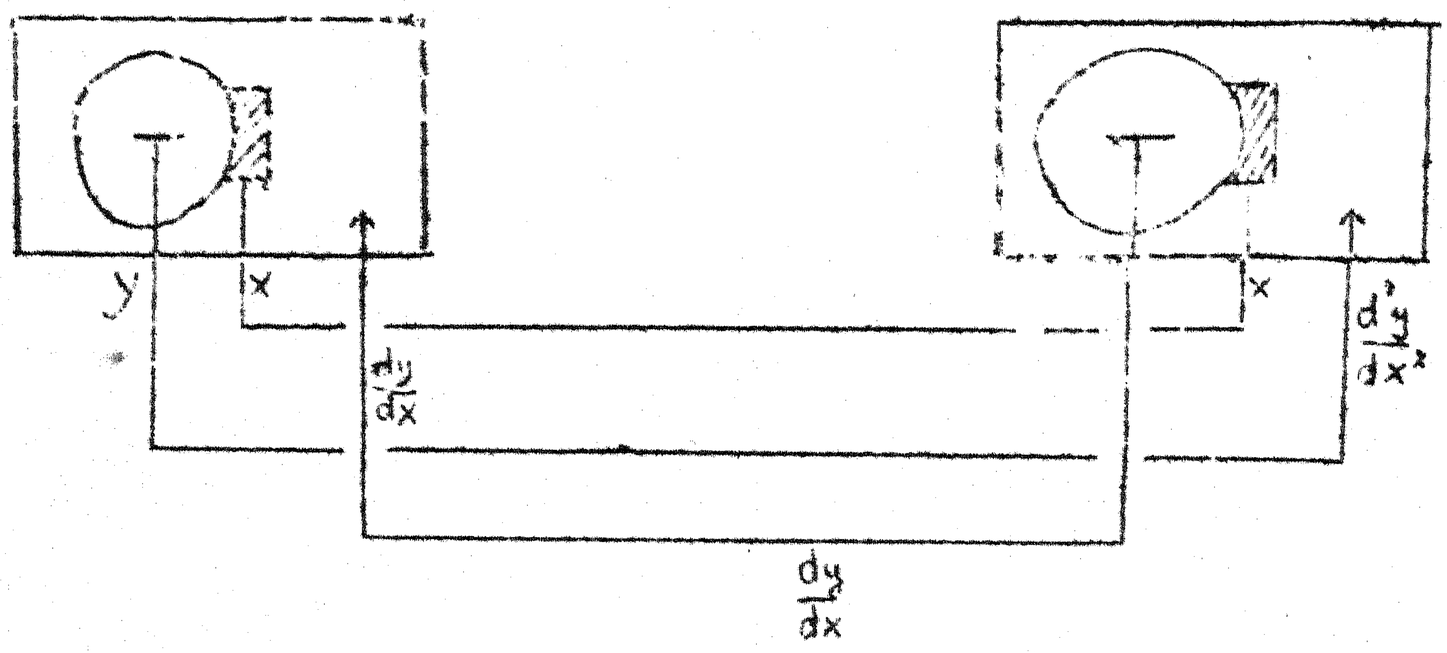
In de output-table wordt de functie getekend.

Symbool:

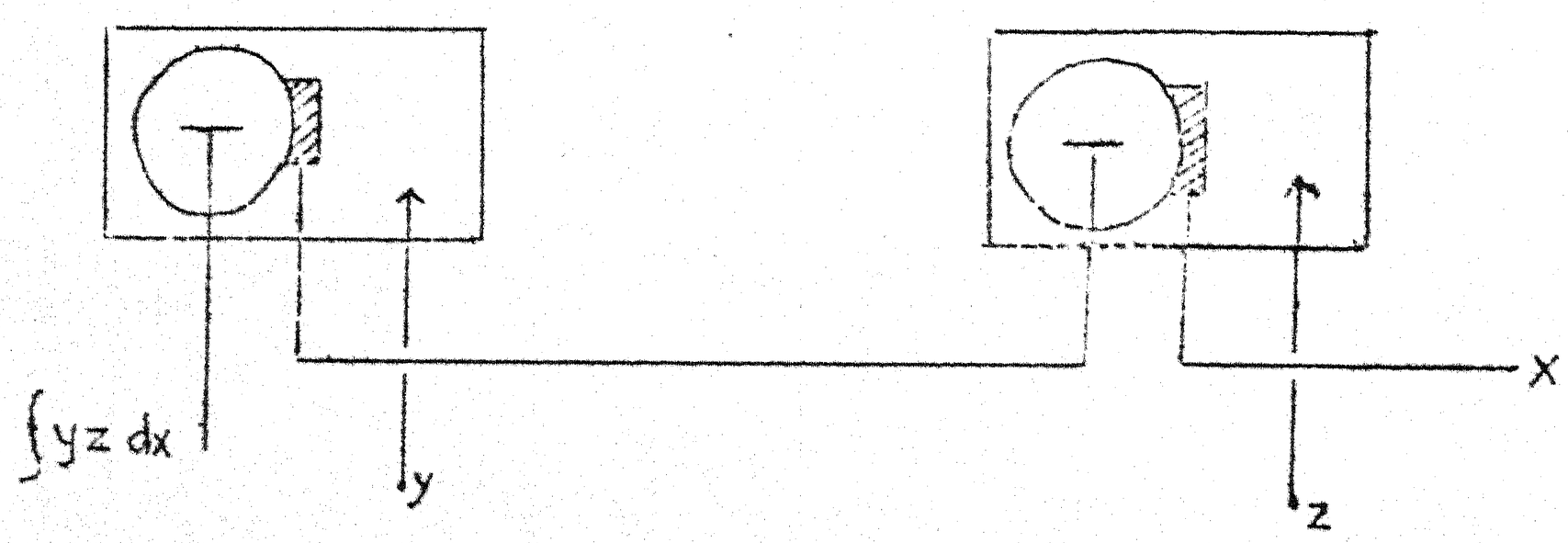
Open cirkel= volgstift.
Zwarte cirkel = tekenstift



Schema voor het oplossen van $\frac{d^2y}{dx^2} = -y$. Hier is geen input-table nodig. Twee integratoreenheden.



Schema voor product-integratie:



Producten kunnen tot integraties worden teruggevoerd: $y\,z = \int y dz + \int z\,dy$
Vereist twee integrator- en één optelaeenheid.

$y = e^z$ kan worden verkregen door de optelling

$\frac{d\,y}{d\,z} = z$. Een integrator vereist.

$y = \sin z$ door $\frac{d^2y}{dz^2} = -y$. Twee integratoren.

$y = z^2$ door $2 \int z\,d\,z$. Een integrator.

$y = z^3$ door $3 \int z^2 d\,z$. Twee integratoren.

$y = \frac{1}{z}$ door $\frac{d\,y}{d\,z} = -y^2$. " "

$y = \sqrt{z}$ door $\frac{d\,y}{d\,z} = \frac{1}{2y}$. Drie integratoren.

of $2\,y\,dy = d\,z$: één integrator.

$z = \frac{y}{x}$ door $dw_1 = z\,d\,x$, $d\,w_2 = (x-1)\,d\,z$,

$d\,z = dy - dw_1 - dw_2 = dy - z\,dx - (x-1)\,z$

dus $x\,z = y$ of $z = \frac{y}{x}$

(Twee integrator-en twee opteleenheden).

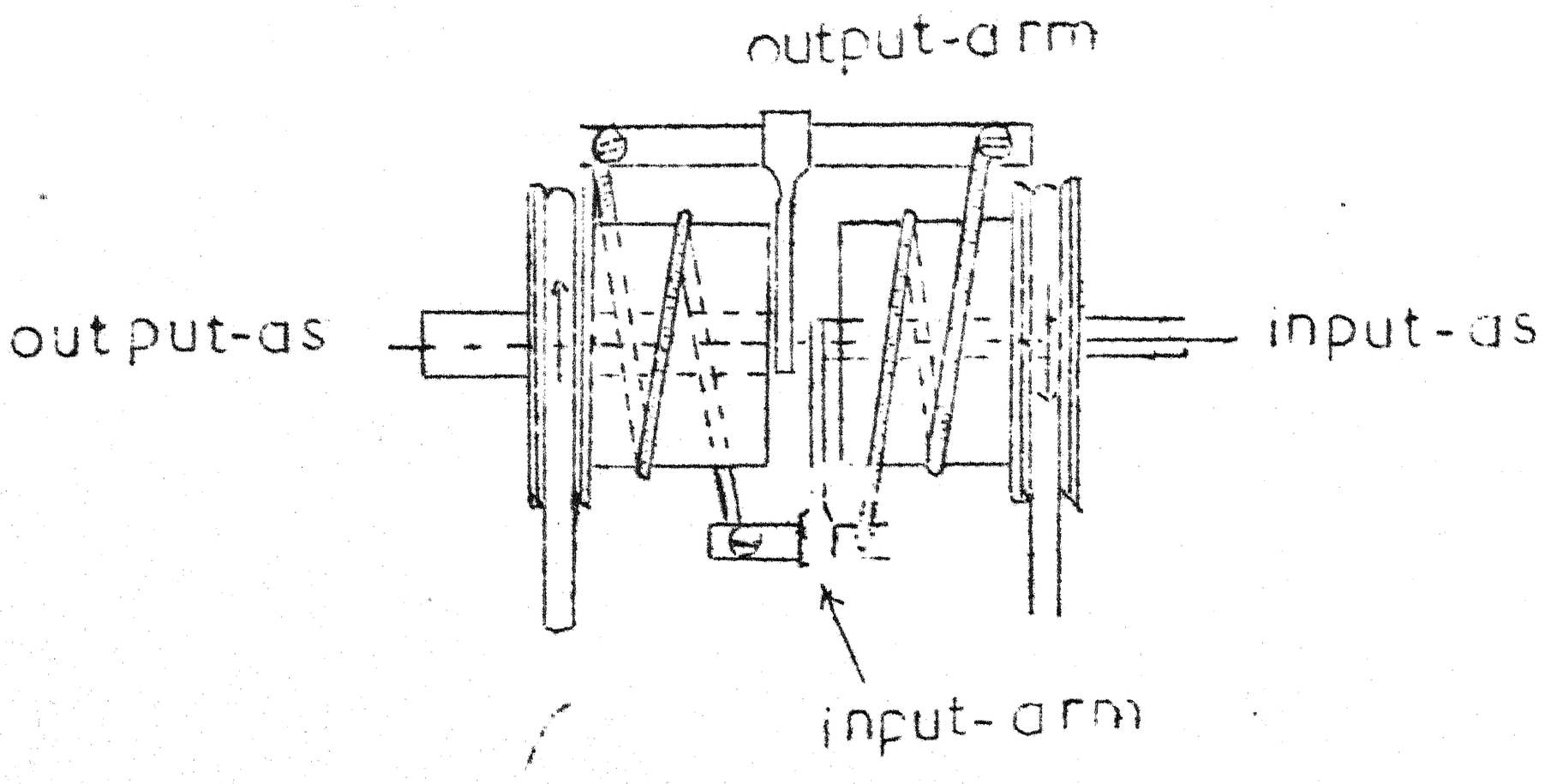
enz.

Schema' zoals bo kunnen voor deze voorbeelden en voor alle mogelijke differentiaalvergelijkingen worden ontworpen. Hierbij moet men echter met de apparatuur-constanten en met de tekens rekening houden. Dit geschiedt door het invoeren van tandrad-combinaties en dergelijke, die ook in het definitieve schema moeten worden aangeduid.

De eerste practisch bruikbare Differential Analyser is in 1925 door Bush geconstrueerd (6 integrator-eenheden?).Hierna zijn in Europa verschillende gebouwd:Manchester,1935,- 8 integratoreenheden.Cambridge 1939 - 8 integratoreenheden.Oslo-(12).Leningrad-(6).Twee in Duitsland.In Engeland werd er ook een Meccano-Diff.-Analyser gebouwd,die goed werkt.Zie literatuur,Hartree-Porter.Tenslotte een nieuwe van Bush (18 integrator-eenheden maar plaats voor 30).

Bij de practische uitvoering komen een groot aantal finesses te pas.Zeer belangrijk is de draaimomentversterker.De aanraking tussen schijf en integratorwiel moet uiteraard zo puntachtig mogelijk zijn.Hierdoor wordt geen toereikend draaimoment overgebracht,om de op de integratorwiel-as aansluitende verbindingen te bewegen.De draaimoment-versterker zoals deze door Bush e.a.toegepast is,is van een ook elders gebruikte constructie.Het beginsel is dat van de scheepslier:Een touw is over een draaiende trommel gewonden;een kleine kracht aam het ene einde veroorzaakt een grote spanning aan het andere.

In ons geval hebben we twee draaiende trommels gedreven door een hulpmotor en twee banden die aan de input-arm en de output-arm vastgemaakt zijn.



De input-as beweegt de input-arm;deze beweging wordt synchroon versterkt overgebracht op de output-arm en van daar op de output-as.

De Duitse Differential Analysers hebben electrische versterking. Hetzelfde is het geval bij de nieuwe van Bush.Er zijn veel electrische methoden om de beweging synchroon over te brengen.Het algemene beginsel is het volgende:de output wordt door een "servomotor" gedreven; deze beweging wordt bv.door een differentiaal vergeleken met die van de input (gegeven beweging),en naar gelang hoe de vergelijking uit-

valt,wordt de servomotor geremd of bespoedigd.Bij Bush geschiedt het vergelijken door wielen met dielectrische kammen,die tussen de platen van condensatoren draaien en hierdoor stroomvariaties veroorzaken.

Verder is er aandacht besteed aan het vermijden van backlash (speling),die ontstaat wanneer een as van draaizin verandert.Door een front-lash-eenheid wordt veroorzaakt,dat de output-as enige tijd 10 % vlugger draait.

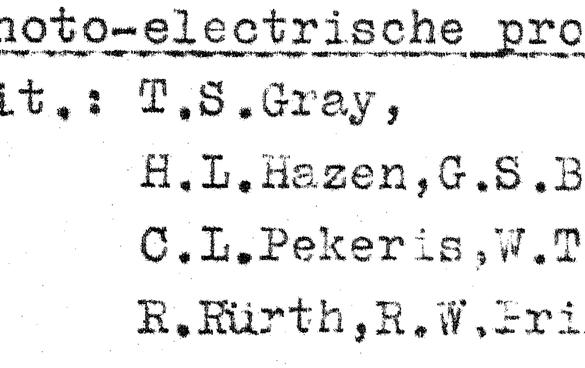
De nieuwe Differential Analyser van Bush is volkomen geautomatiseerd door verbinding met een ponsstrook-systeem.De gegeven functies worden op ponsstroken ingevoerd,en de gehele opstelling van het meest ingewikkelde probleem geschiedt binnen enkele minuten door ponsstrook-aanwijzingen;hierdoor worden dus de nodige koppelingen tot stand gebracht en de transmissie-constanten ingevoerd;elke transmissie-eenheid bestaat uit 4 decimale stappen,waardoor dus 4-cijfer-getallen als transmissieconstanten kunnen worden ingesteld.Het resultaat wordt meteen getypt.De machine weegt 100 ton,bevat 2000 electrische buizen, 200 mijl draad,150 motoren.

De gemiddelde fout van de eerste Bush-Diff.-Anal.was 0,032%,de maximale 0,12%.Die van de Meccano-Diff.Anal.van Hartree 1%.Die van de nieuwe Bush-Diff.Anal.is 0,01%.

Photo-electrische productintegratie-methoden.

Lit.: T.S.Gray, Journ.Frankl.Inst.212 (1931),77-102
H.L.Hazen,G.S.Brown, " " " 230 (1940),183-205
C.L.Pekeris,W.T.White, " " " 234 (1942),17-29
R.Kürth,R.W.Pringel, Phil.Mag. (7) 35 (1944),643
" " " " (7) 37 (1946),1-13
F.J.Murray zie boven.

De methode van Gray gaat op een idee van N.Wiener terug.Men maakt twee maskers van karton voor de ordinatenverzameling van twee gegeven functies $f(x)$ en $g(x)$.Deze worden evenwijdig aan elkaar geplaatst op grote afstand van een lichtbron.De door een smalle strook dx doorgelaten hoeveelheid licht is $f(x)g(x)dx$.Samen $\int f(x)g(x)dx$.



Speciaal belangrijk zijn de integralen $\int f(x)g(x-y)dx$

Het ene masker wordt langs het andere voorbij geschoven.De hoeveelheid licht wordt photo-electrisch gemeten.

Hasen en Brown hebben dit uitgebreid door het ene masker nog van een parameter te laten afhangen.Dit wordt gerealiseerd door het variabele masker op een film aan te brengen.Men kan dus voor willekeurige kernen $K(s,t)$ vormen

$\int K(s,t)f(t)dt$

De uitkomst hangt nu ook van s af en wordt door een geschikt toestel opgetekend.Het optreden van negatieve functiewaarden geeft enige moeilijkheden.

Fürth en Pringle hebben speciaal de productintegratie met als factor een trigonometrische functie behandeld.Het "masker"van deze functies is een glasplaat met harmonisch varierende doorlaatbaarheid.

Een ander toestel van Führt en Pringel berust op de octodenbuis: de anodenstroom is even evenredig met de potentialen vantwee roosters, en vermenigvuldigt dus deze twee als het ware met elkaar.De integraal hiervan over de tijd wordt gemeten.

Cursus Numerieke en Graffische Methoden.

XXIV en XXVI

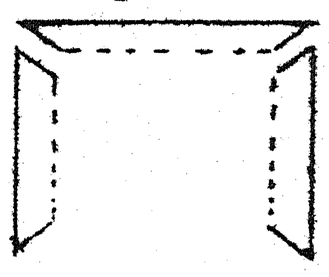
MATHEMATISCH CENTRUM
Wyttenbachstraat 5
A m s t e r d a m.

Correcties.

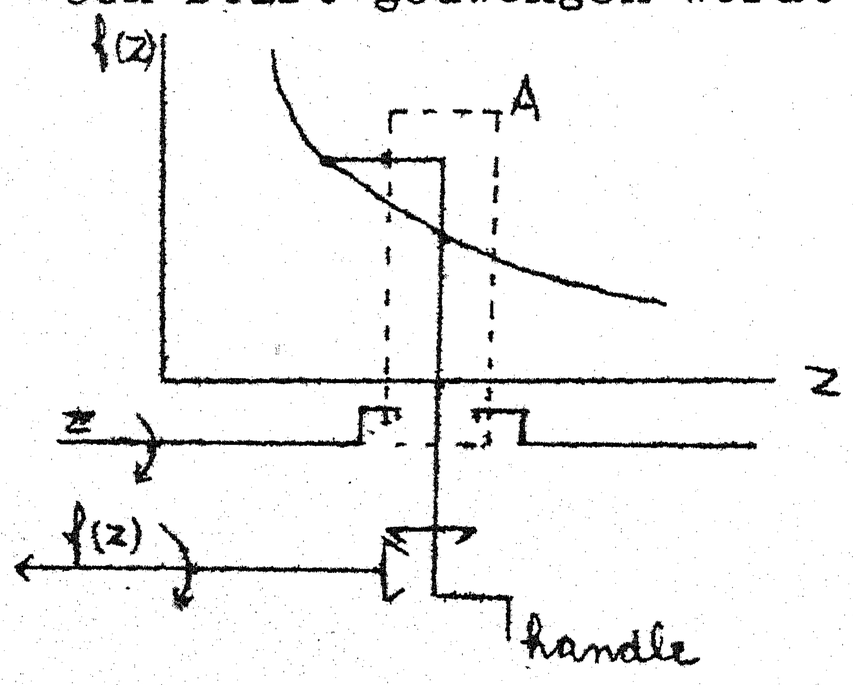
Syllabus XXIII p.7,laatste 4 regels.

Lees:
(waar $\nu_0, \nu_1, \ldots \nu_i$)steeds een permutatie van i+1 op elkaar volgende onder de getallen -m,....,+m is),dan moet men in het differentieschema bij $f(x_{\nu_0})$beginnen en telkens naar boven of onderen gaan,naar gelang de toegevoegde bij de voorafgaanden naar rechts of links aansluit.Nog symmetrischer.....

Syllabus XXIV.
blz.1.Bij de figuur:
De getekende schijven stellen kroonraderen voor,die volgens het volgende schema in elkaar grijpen:



blz.2. Bij de figuur met symbool voor integratoreenheid: $u = \omega\, dv$
Bij de figuur met symbool voor opteleenheid:
c = a+ b.
blz.3.Schrap bovenste alinea.Lees:
Gegeven functies worden ingevoerd door een "input-table".Met de handle draaiend wordt brug A voortbewogen,terwijl een stift gedwongen wordt op de grafiek te blijven.De beweging van de handle wordt op de assen f(z)en z overgebracht.



blz.3.Bij symbool voor input-table:
$q = f(p)$
Bij symbool voor output-table:
$y = F(x)$
blz.3. Bij schema voor $\frac{d^2y}{dx^2} = -y$:

De combinatie wordt in beweging gebracht door een motor,die een van de drie horizontale assen aandrijft.

blz.3.Bij schema voor product-integratie:Schrijf bij de verbinding der integratoren: $\int z\, dx$

blz.4.r.5 v.onder Lees:Schema's zoals boven.....
blz.5.r 1 v.boven Lees:Differential Analyser is in 1925-30 door.....
blz.5.Opmerking bij de figuur:
In de figuur zijn enkele lijnen weggevallen.Evenwel is de input-arm geheel analoog aan de output-arm (horizontale deel iets korter).
blz.6 r.17 v.onder Lees:R.Fürth,R.W.Pringle.
r.4.v.onder Lees:Hazen en Brown.
blz.7 r.4 v.onder Lees:Fürth en Pringle.

Cursus Numerieke en Graphische Methoden.

Nog een interpolatieformule.

Men noeme de (equidistante) abcissen

$$x_{-(2m+1)} \quad x_{-(2m-1)} \quad \cdots \quad x_{-1} \quad x_{+1} \quad \cdots \quad x_{2m-1} \quad x_{2m+1}$$

(dus even nummers overslaan); $x_{+1} - x_{-1} = \triangle$. Het schema XXIII p, 7 ondergaat dan een onbelangrijke wijziging. Men kieze nu uit (analoog XXIII p.8):

	$\{0\}^*$	$\{1\}^*$	$\{2\}^*$	$\{3\}^*$
x_{-1}	$f(x_{-1})$	$f_1(x_{-1})$	$f_2(x_{-3})$	$f_3(x_{-3})$
x_{+1}	$f(x_{+1})$		$f_2(x_{-1})$	

en vorme weer de gemiddelden van de twee ontstaande interpolatieformules:

$$f(x) = f(x_{-1}) + \frac{f_1(x_{-1})}{1!}(x - x_{-1}) + \frac{f_2(x_{-3})}{2!}(x - x_{-1})(x - x_{+1}) + \frac{f_3(x_{-3})}{3!}(x-x_{-1})(x-x_{+1})(x-x_{-3}) + \cdots$$

en

$$f(x) = f(x_{+1}) + \frac{f_1(x_{-1})}{1!}(x-x_{+1}) + \frac{f_2(x_{-1})}{2!}(x-x_{-1})(x-x_{+1}) + \frac{f_3(x_{-3})}{3!}(x-x_{+1})(x-x_{-1})(x-x_{+3})$$

dus

$$f(x) = \{0\}^* + \frac{1}{1!}\{1\}^*(x-x_0) + \frac{1}{2!}\{2\}^*(x-x_{-1})(x-x_{+1}) + \frac{1}{3!}\{3\}^*(x-x_0)(x-x_{-1})(x-x_{+1}) + \cdots = \{0\}^* + \frac{1}{1!}\{1\}^* u + \frac{1}{2!}\{2\}^*(u^2\frac{1}{4}\Delta^2) + \frac{1}{3!}\{3\}^* u\,(u^2 - \frac{1}{4}\Delta^2) + \cdots \text{ met } u = x - x_0 .$$

Numerieke integratie.

Men integrere de interpolatieformule XXIII, p. 8 van $-\Delta$ tot $+\Delta$:

$$\int_{x_{-1}}^{x_{+1}} f(x)\,dx = \Delta\left(\{0\} + \frac{\Delta^2}{6}\{2\} - \frac{\Delta^4}{180}\{4\} + \frac{\Delta^6}{1512}\{6\} + \cdots\right) \quad (1.$$

Hieruit verkrijgt men de intergaal tussen abcissen met oneven index. Wenst men de integraal tussen alle gegeven abcissen te hebben , dan werkt men beter met de interpolatieformule uit deze syllabus:

$$\int_{x_{-1}}^{x_{+1}} f(x)\,dx = \Delta\left(\{0\}^* - \frac{\Delta^2}{12}\{2\}^* + \frac{11}{720}\Delta^4\{4\}^* - \frac{191}{60480}\Delta^6\{6\}^* + \ldots\right) \quad (I)$$

Houdt men alleen met de 0-de-graadstermen rekening, en tevens alleen met de functiewaarden in het integratieinterval (x_o, x_p), dan krijgt men de trapeziumformule :

$$\int_{x_o}^{x_p} f(x)\,dx = \Delta\left(\frac{1}{2} f(x_o) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{p-1}) + \frac{1}{2} f(x_p)\right).$$

Gebruikt men in I de o-de en 1-de graadstermen en drukt men 2 in de ordinaten uit

$$\{2\} = f_2(x_{-1}) = \frac{f_1(x_o) - f_1(x_{-1})}{\Delta} = \frac{f(x_1) - 2 f(x_o) + f(x_{-1})}{\Delta^2}$$

dan krijgt men de formule van Simpson:

$$\int_{x_o}^{x_p} f(x)\,dx = \frac{\Delta}{3}\left(f(x_o) + 4 f(x_1) + 2 f(x_2) + 4 f(x_3) + \ldots + 2 f(x_{2p-2}) + 4 f(x_{2p-1}) + f(x_{2p})\right)$$

Methode van Gauss.

Men werkt met niet-equidistante abcissen x_ν tussen -1 en +1. Zij $f(x)$ een $(2n-1)^{de}$ graadsveelterm, waarvan $\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx$ berekend moet worden op grond van de waarden in n punten. Heeft $g(x)$ daar de zelfde waarden als $f(x)$, dan moet dus gelden

$$\int_{-1}^{+1}\left[f(x) - g(x)\right]\,dx = 0 .$$

Of van elke (2n - -de-graads veelterm $h(x)$ met $h(x_\nu) = 0$ $(\nu = 1,\ldots,n)$ moet $\int_{-1}^{+1} h(x)\,dx = 0$ zijn. Of, als we stellen

$$\varphi_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

dus $h(x) = \varphi_n(x)\cdot k(x)$ (graad $k(x) \leqq n-1$)

en moet $\int_{-1}^{+1} \varphi_n(x)\, k(x)\,dx = 0$

zijn voor elke (n-1)-de graads $k(x)$, of

$$\int_{-1}^{+1} \varphi_n(x)\, x^\nu\,dx = 0, \quad (\nu = 1,\ldots,n-1.)$$

(orthogonoliteitsrelaties).

De φ_n zijn op een getallen-factor na de veeltermen van Legendre. De abcissen dus worden gekozen als de nulpunten van deze veeltermen.

n = 2 $\qquad x = \pm \frac{1}{3}\sqrt{3}$

n = 3 $\qquad x = \pm \frac{1}{5}\sqrt{15},\ 0.$

In de praktijk speelt alleen het geval n = 2 een rol (Metereologie, temperatuuraflezing 5 h. en 19 h). De hieruit bepaalde gemiddelde temperatuur zou dus nauwkeurig zijn, indien de functie als een 3-de-graads parabool verloopt (bij benadering geldt dit voor de temperatuur- één maximum en één minimum per 24 h).

Cursus Numerieke en Graphische Methoden.

Methode van Graeffe voor de wortels van een algebraische vergelijking.

Het idee kwam al bij de berekening van eigenwaarden van matrices voor. Men transformeert de gegeven vergelijking

$$f(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

op een vergelijking $f_1 = 0$, waarvan de wortels de kwadraten van die van $f(x)$ zijn, door $\pm f(x)\, f(-x)$ te vormen; dit is een functie $f_1(x^2)$ van x^2 met de gewenste eigenschap. De vermenigvuldiging geschiedt volgens het schema:

$f(x)$	a_o	a_1	a_2	a_3 .....
$\pm f(x)$	a_o	$-a_1$	$+a_2$	$-a_3$ .....
	a_o^2	$-a_1^2$	$+a_2^2$	$-a_3^2$ .....
$\pm f(z)f(-x)$		$+2a_oa_2$	$-2a_1a_3$	$+2a_2a_4$ .....
		$+2a_oa_4$		$-2a_1a_5$ .....
				$+2a_oa_6$ .....
	a_o^1	a_1^1	a_2^1	a_3^1 .....

Door deze transformatie telekns te herhalen worden de wortels uit elkaar getrokken. Zijn de oorspronkelijke wortels

$$x_1 > \ldots > x_n$$

dan zijn die van de p-de stap $y_\nu = x_\nu^{2^p}$ met

$$y_1 \gg y_2 \gg \ldots \gg y_n \ .$$

Zijn de coefficienten van de p-de getransformeerde $b_o, b_1, \ldots b_n$ dan is

$$-\frac{b_1}{b_o} = \sum y_\nu \sim y_1$$

$$+\frac{b_2}{b_o} = \sum_{\mu \neq \nu} y_\mu y_\nu \sim y_1 y_2$$

$$-\frac{b_3}{b_o} = \sum y_\mu y_\nu y_\rho \sim y_1 y_2 y_3$$

dus $y_1 \sim -\frac{b_1}{b_o}$, $y_2 \sim -\frac{b_2}{b_o}$, $y_3 \sim -\frac{b_3}{b_o}$. De x_ν worden hieruit als

2^p-de machtswortels verkregen; de tekens krijgt men op deze wijze niet.

Bij de practische doorvoering treden spoedig grote getallen op. Men schrijft ze gestandariseerd, d.w.z. met één cijfer $\neq 0$ voor de komma en een bovenindex, die de macht van 10 aanduidt.

Voorbeeld: $(x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

1	-6	$+11$	-6	
+	+	+	+	
1	$-3^1.6$	$+1^2.21$	$-3^1.6$	
	$+2\cdot2$	$-0\cdot72$		
1	$-1^1.4$	$+4^1.9$	$-3^1.6$	2^e machten
+	+	+	+	
1	$-1^2.96$	$+2^3.40$	$-1^3.30$	
	$+0\cdot98$	$-1\cdot01$		
1	$-9^1.8$	$+1^3.39$	$-1^3.30$	4^e machten
+	+	+	+	
1	$-9^3.61$	$+1^6.93$	$-1^6.69$	
	$+2\cdot78$	$-0\cdot25$		
1	$-6^3.83$	$+1^6.68$	$-1^6.69$	8^e machten
+	+	+	+	
1	$-4^7.67$	$+2^{12}.82$	$-2^{12}.86$	
	$+0\cdot33$	$-0\cdot02$		
1	$-4^7.34$	$+2^{12}.80$	$-2^{12}.86$	16^e machten
+	+	+	+	
	$-1^{15}.88$	$+7^{24}.85$	$-8^{24}.19$	
	$+0\cdot006$	$+0\cdot0002$		
1	$-1^{15}.874$	$+7^{24}.85$	$-8^{24}.19$	32^e machten.

Het is nutteloos verder te gaan, omdat de gemengde producten reeds verwaarloosd kunnen worden. We vinden

$$|x_1| = 1{,}001 \qquad |x_2| = 1{,}998 \qquad |x_3| = 3{,}001$$

Komen er onder de wortels van g(x) voor met dezelfde absolute waarde (b.v. toegevoegd complexe), of van bijna dezelfde absolute waarde, dan faalt onze redenering. Zij dus

$$|y_1| \gtrsim |y_2| \gtrsim \cdots \gtrsim |y_k| \gg |y_{k+1}| \gtrsim \gtrsim |y_n|$$

Op de coefficienten $\frac{b_1}{b_o}, \ldots, \frac{b_k}{b_o}$ oefenen practisch alleen de $y_1, \ldots y_k$ een invloed uit, dus

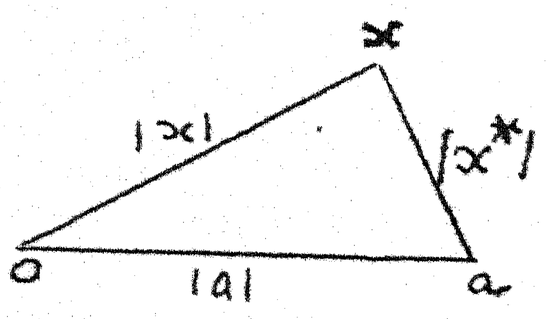
$$b_o y^k + b_1 y^{k-1} + \ldots + b_k \sim b_o (y-y_1)\ldots(y-y_k) .$$

In de coefficienten $\frac{b_{k+1}}{b_o}, \ldots, \frac{b_n}{b_o}$ overwegen die termen, die $y_1, \ldots y_k$ als factor bevatten, en wegens $\frac{b_k}{b_o} \sim (-)^k y_1 \ldots y_k$ heeft men

$$b_k y^{n-k} + b_{k+1} y^{n-k-1} + \ldots + b_n \sim b_k (y-y_{k+1})\ldots(y-y_n) .$$

De vergelijking is dus practisch in twee vergelijkingen gesplitst. Bij het rekenen wordt men dit gewaar, doordat de coefficienten van het ene deel in de gemengde producten bij het andere deel geen invloed meer uitoefenen. Zodra zo iets gebeurd zal men de twee factoren van de vergelijking afzonderlijk verder behandelen. Mogelijk krijgt men tenslotte een splitsing in lineaire en kwadratische factoren. De tekens en de argumenten van de oorspronkelijke vergelijking zijn op deze wijze niet vast te stellen. Om die te vinden en eventueel ook om hogere graads-factoren met gelijke wortels verder te splitsen, kan men met de x een translatie uitvoeren:

$$x = x^* + a \quad , \quad f(x) = f(x^* + a) = f^*(x^*) .$$



Hierbij raken wortels met dezelfde absolute waarde uit elkaar, behalve (bij reele a) de geconjungeerde complexe, die men echter uit vierkantsvergelijkingen bepaalt. Hun argumenten blijken, als men de wortels van f(x) en $f^*(x^*)$ met elkaar vergelijkt.

Opm. Zie over de methode van Graeffe ook

E. Bodewig, Quaterly Appl.Math. 4 (1946), 177.

De methode van Graeffe is vooral belangrijk, omdat men alle wortels tegelijk kan krijgen. Verkregen wortels worden verbeterd, b.v. met de methode van Newton:

$$f(x) = f(x_o) + (x-x_o)\, f'(x_o) + \ldots.$$

$$x - x_o \sim \frac{f(x) - f(x_o)}{f'(x_o)}$$

Of door iteratie:

Zijn $x_1^*, \ldots, x_m^*$ de approximatieve wortels van

$$f(x) = a_o x^n + \ldots + a_n$$

en is

$$f^*(x) = a_o (x-x_1^*) \ldots (x-x_n^*) \quad ,$$

dan vorme men

$$\frac{f^*(x) - f(x)}{a_o (x-x_2^*) \cdots (x-x_n)} = Q.$$

Voor $x = x_1$ (met $f(x_1) = 0$) geldt $Q = x_1 - x_1^*$: juist de op x_1^* aan te brengen correctie. Bij benadering kan men Q berekenen door er x_1^* i.p.v. x_1 te substitueren. Dit kan men desgewenst herhalen.

Iteratiemethoden. kan men van het begin af aan bij bepaalde vergelijkingen (algebraische of transcedente) met succes toepassen. Men brenge de vergelijking op de vorm

$$x = \varphi(x) \quad ,$$

begint met een x_o en stelt $x_1 = \varphi(x_o)$, $x_2 = \varphi(x_1) \ldots$, in de hoop dat $\lim x_n = x$ bestaat en dus geldt $\varphi(x) = x$. Het proces zal convergeren, indien de correcties

$$x_{m+1} - x_m$$

zich als de termen van een (Conv. meetkundige reeks gedragen, en dit zal zeker het geval zijn, als

$$|\varphi(x) - \varphi(x^*)| < \vartheta . |x - x^*| \text{ met een } |\vartheta| < 1,$$

dus als $|\varphi'(x)| < 1$ voor de wortel x.

Voorbeeld: $x^5 - 2x^4 - 12x^2 + 1 = 0$ heeft een wortel tussen 0 en 1. Men schrijft

$$x = \sqrt{\frac{1}{12}(x^5 - 2x^4 + 1)}$$

$\varphi'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{5x^4 - 8x^3}{x}$ (als x de wortel is). Het proces convergeert dus.

Een oud voorbeeld voor de iteratiemethode is de berekening van D, dus de oplossing van $x^2 = D$.

$$x = \frac{D}{x}$$

zou geen nut hebben, want voor de wortel is $\varphi'(x) = -\frac{D}{x^2} = -1$.

Maar juist in dergelijke gevallen $x = \varphi(x)$ met $\varphi'(x) = -1$, waar de successieve iteraties zouden oscileren, bedient men zich met succes van

$$x = \frac{1}{2}\ (\ x + \varphi(x)\ )$$

waarbij de afgeleide verdwijnt. Speciaal bij de vierkantswortel

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{D}{x}\right)$$

Algemeen indien $x = \varphi(x)$ met $\varphi'(x) = \alpha \neq 1$

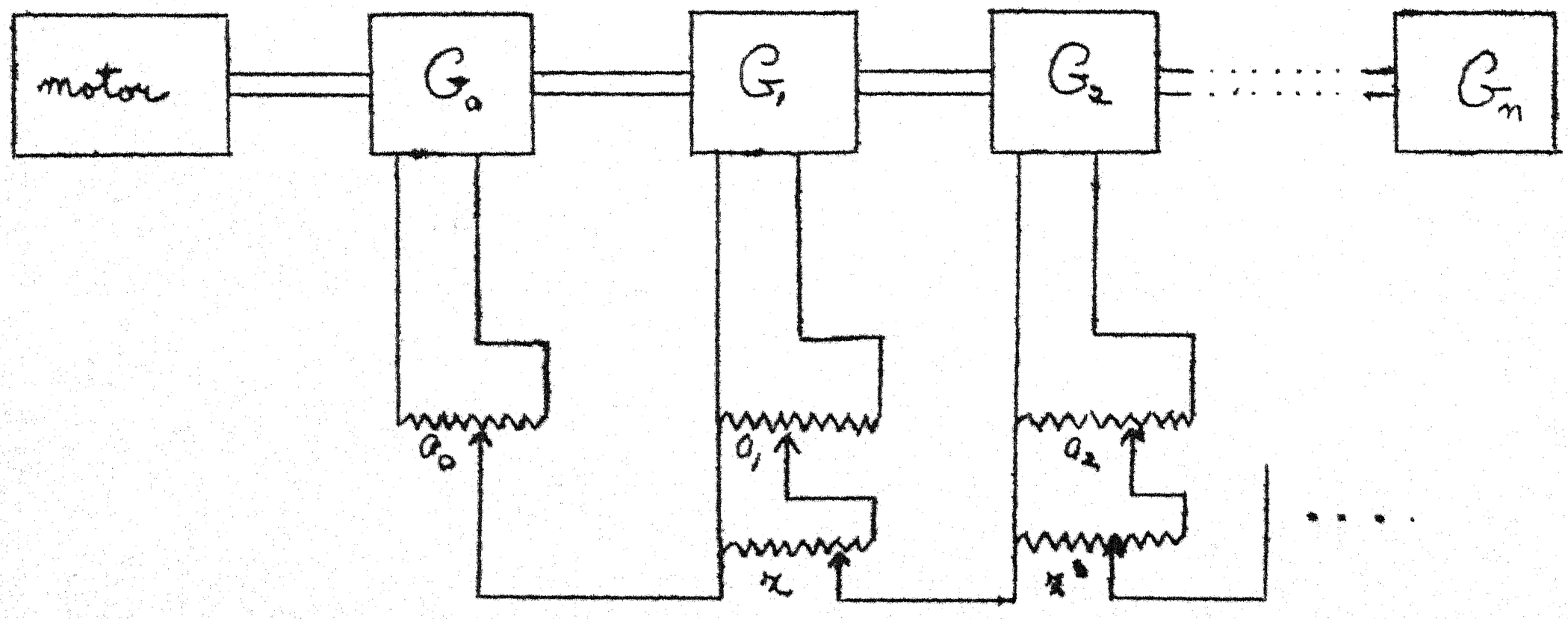
$$x = \frac{\varphi(x) - \alpha x}{1 - \alpha}$$

waarbij van het nieuwe rechterlid de afgeleide nul is, of tenminste (wanneer α niet nauwkeurig bekend is),

$$x = \frac{\varphi(x) - \beta x}{1 - \beta}$$

met een β, die dichter bij α dan bij 1 hoort te liggen.

<u>Een machine voor het oplossen van algebraische vergelijkingen</u>, geconstrueerd door H.C. Hart & E.J. Travis, Journal Franklin Inst. 225 (1938), 63-72.



Men heeft wisselstroomgeneratoren $G_o, \ldots G_n$, waarvan de rotoren coaxiaal gekoppeld zijn. De stators zijn los van elkaar en draaien in gelijke tijden over hoeken $0, \vartheta, 2\vartheta, \ldots$. Door de bovenste rij potentiometers worden de coefficienten ingevoerd, in de onderste rij zijn de potentiometers zo gekoppeld, dat zij de machten van een grootheid Z geven. Z en moeten zo gevarieerd worden, dat een nul-indicator O aanwijst. Dan geldt

$$o = \sum a_\nu z^\nu \cos(\omega t + \nu\vartheta), \text{ dus } \sum a_\nu (z\, e^{i\vartheta})^\nu = 0.$$

Het geconstrueerde model lost een 8e graads-vergelijking in een half uur op: fout < 2% in de absolute waarde, < 1 % in het argument. Of er een grotere uitvoering ondertussen is geconstrueerd, is mij niet bekend.

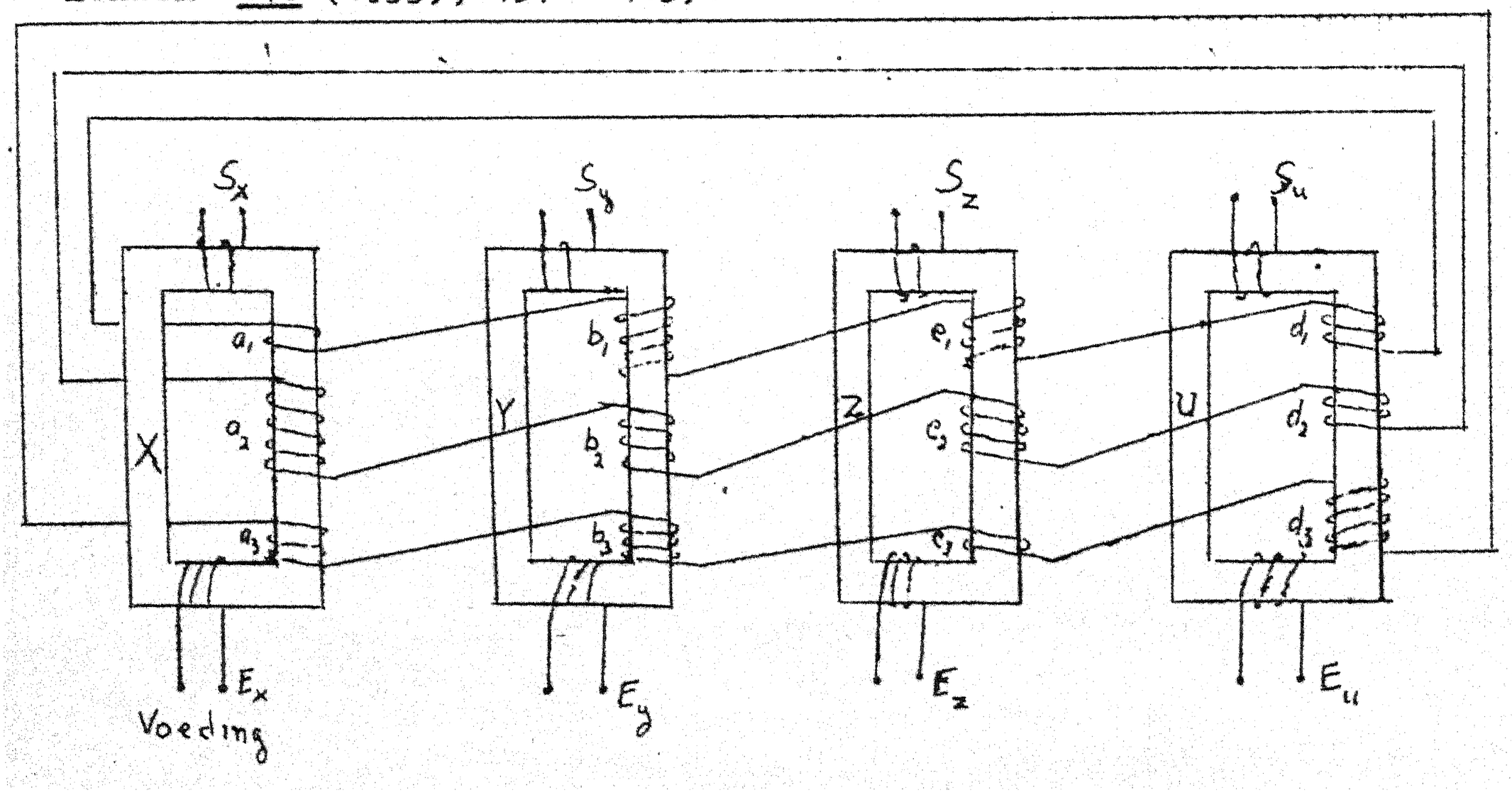
Cursus Numerieke en Grafische Methoden.

In syllabus VII beschreven wij een op de vertakkingswetten van Kirchhoff gebaseerde machine voor het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen. Hierbij wordt een iteratieproces manueel uitgevoerd. In syllabus VI (blz. 3) behandelden wij een iteratieproces (methode van de "steepest descent"), dat voor volledige automatisering het meest aangewezen schijnt: om A x = c op te lossen, corrigeert men de n^{de} benaderde oplossing x_n met een term

$$- \sigma_n A' (A x_n - c)$$

waarbij nog σ_n constant kan worden gehouden (b.v. = 1 als A op de normaalvorm van Hesse is gebracht). W.A. Adcock ("An automatic simultaneous Equation Computer and its use in solving secular Equations" Review Scient. Instruments 19 (1948), 181-187) schijnt dit gerealiseerd te hebben met een electrisch beginsel, analoog aan dat beschreven in syllabus VII, gecombineerd met een "feed back" methode. De coefficienten van de matrix A worden twee keer in potentiometers ingesteld: met het eerst stel wordt uit een proef - x de bijbehorende A x - c "berekend", met het tweede hieruit A'(A x - c), dat dan van de proef-x door eèn feed back wordt afgetrokken. De oplossing maakt geen elegante indruk. Een minimummethode schijnt mij geschikter. De zaak zou door een goed technicus moeten worden bekeken.

Een van de oudste werkelijk gerealiseerde machines, die met electrische beginselen stelsels lineaire vergelijkingen oplost, is van R.R.M. Mallock ("An Electrical Calculating Machine", Proc.Roy.Soc. London 140 (1933), 457 - 483).



In de figuur op blz. 1 is het principe weergegeven voor de oplossing van het stelsel:

$$(1)\qquad \begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 u &= 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 u &= 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 u &= 0 \end{aligned} \quad ;$$

x/u, y/u en z/u zijn dan de oplossingen van het overeenkomstig stelsel van drie niet-homogene vergelijkingen in drie onbekenden. In onze figuur is het geval

$$\begin{pmatrix} +1 & -4 & -3 & +2 \\ +4 & +3 & +3 & +2 \\ +2 & +3 & +1 & -4 \end{pmatrix}$$

gerealiseerd (let op aantal en richting der windingen bij de coëfficientenspoelen).

De vier rechthoekige ringen in de figuur stellen ijzerkernen voor. Op de spoel E_x wordt een constante wisselspanning gezet. Het wisselend magnetisch veld van E_x wordt door de ijzerkern X rondgeleid en in de spoelen a_1, a_2 en a_3 ontstaat daardoor een wisselstroom enz. In de veronderstelling, dat de weerstanden in de drie gesloten stroomdraden te verwaarlozen zijn, zullen deze in de evenwichtstoestand stroomloos zijn, en dus zullen in elk der draden de optredende spanningen elkaar opheffen. Als nu x de spanning voorstelt, die in één winding om de kern X wordt geïnduceerd, (evenzo y, z, u) en elk coefficient evenredig is met het aantal windingen van de overeenkomstige spoel, dan is het vergelijkingenstelsel (1) juist vervuld. De onbekenden x, y, z, u worden afgelezen aan de spoelen S_x, S_y, S_z, S_u.

De machine is ontworpen voor het oplossen van tien niet-homogene vergelijkingen in tien onbekenden. Er zijn dus elf ijzerkernen nodig. De grootteorde van elke onbekende is direct zichtbaar aan de helderheid van corresponderende lamp (tussen lamp en spanningafnemende winding is een versterker ingeschakeld; de versterker wordt tevens voor de later te bespreken compensator gebruikt). Dit is vooral belangrijk om direct de grootste wortel van het stelsel te kunnen vaststellen. Lineaire combinaties

$$a_o x + b_o y + c_o z + d_o u$$

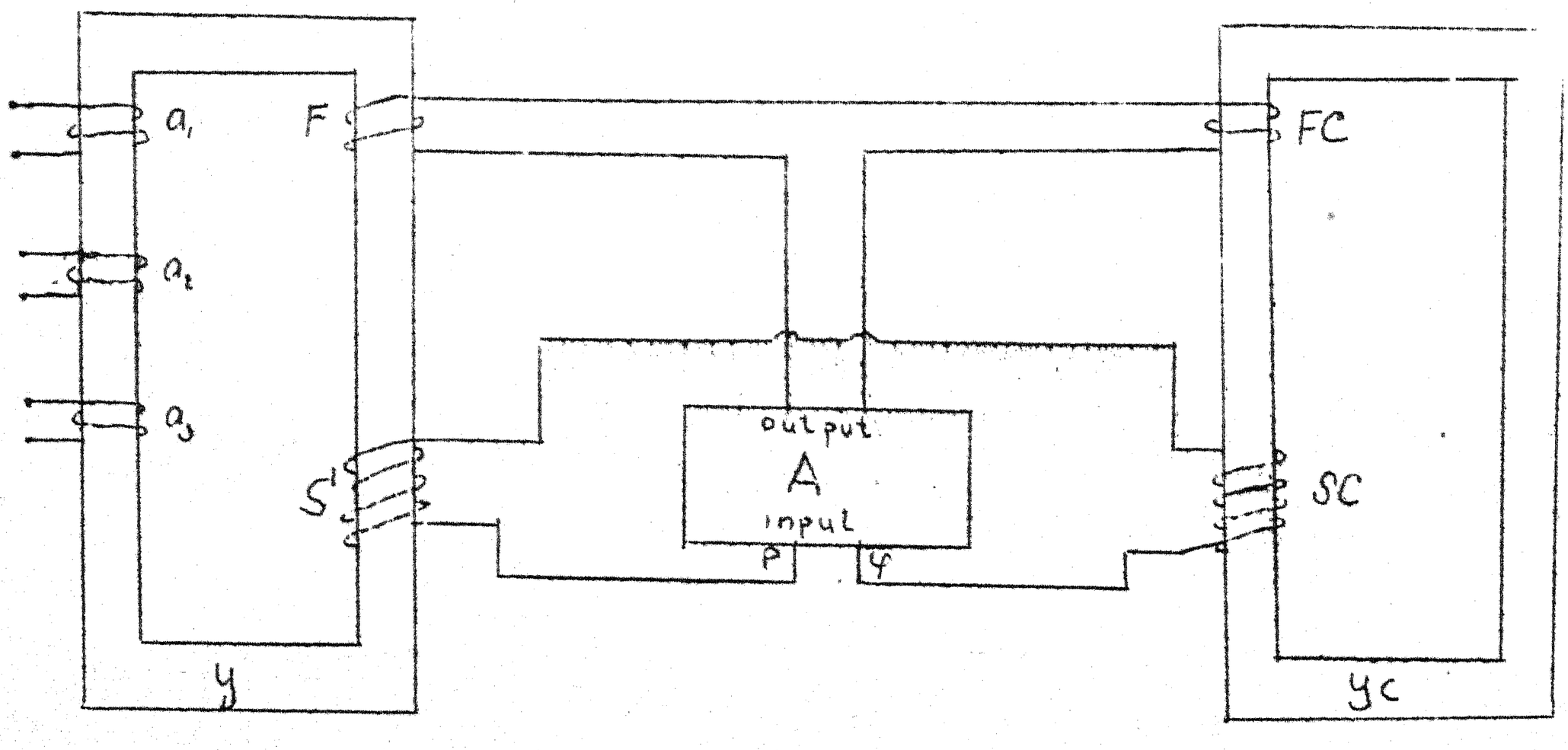
kunnen direct worden bepaald, met behulp van extra-spoelen (a_o om X enz), en in het bijzonder kunnen we bepalen op welke fouten na de verkregen oplossingen aan de vergelijkingen (1) voldoen. In het geval van een ongunstig vergelijkingenstelsel kunnen deze vrij groot zijn. In gunstiger gevallen blijkt de fout in de wortel hoogstens 0,1 % van de grootste wortel te zijn.

Bij een practische uitvoering van het geschetste principe treden twee moeilijkheden op: vooreerst zijn de stromen in de vergelijkingen-kringen niet nul, doordat de Ohmse weerstanden niet geheel mogen worden verwaarloosd. En vervolgens worden niet alle krachtlijnen door een ijzerkern gesloten maar verlopen sommige gedeeltelijk door de lucht. Daardoor wordt niet in alle windingen om X (resp. Y..) dezelfde wisselspanning geinduceerd. Het laatste effect is bij voldoend zwakke velden te verwaarlozen t.o.v. het vorige. Om de eerstgenoemde werking te neutraliseren heeft men aan elk ijzerkern een z.g. compensator verbonden, en wel om de stromen in de vergelijkingen-kringen zoveel mogelijk tot nul te reduceren.

Als i_k resp. r_k de stroom resp. de weerstand voorstelt in de kring van de k^{de} vergelijking, dan geldt n.l. in plaats van (1)

(2) $$a_k x + b_k y + c_k z + d_k u = r_k i_k \quad (k = 1,\ldots 3).$$

Het schema van de compensator is als volgt:



A is een versterker en Y C een transformator (de compensatietransformator) met de zelfde afmetingen en van het zelfde materiaal als Y. Ook de spoelen S' en S C resp. de spoelen F en F C zijn geheel gelijk. S' is met de kathode van A verbonden, S C met het rooster (resp. in P en Q), terwijl tussen F en F C de uitgangsspanning van de versterker staat (dus de spanning tussen kathode en anode). Bij een grote versterking zal het verschil in E.M.K. in de spoelen S' en S C klein zijn t.o.v. het overeenkomstig verschil tussen F en F C. Dus de wisselende magneetvelden in Y en Y C zijn practisch gelijk. In Y C zijn evenwel geen coefficientenspoelen opgenomen. Voor de transformator Y volgt dan dat de stromen noodzakelijk zo zijn, dat $b_1 i_1 + b i_2 + b_3 i_3 = 0$.

Analoog voor Z en U

$$c_1 i_1 + c_2 i_2 + c_3 i_3 = 0$$
$$d_1 c_1 + d_2 i_2 + d_3 i_3 = 0$$

Deze drie vergelijkingen hebben evenwel in het algemeen slechts de nuloplossing. Dus volgt $i_1 = i_2 = i_3 \neq 0$ waardoor (2) equivalent met (1) wordt. Het stelsel (1) wordt door de machine dus bij goede benadering gerealiseerd.

Methode van de kleinste kwadraten.

De machine is in staat het volgende minimumprobleem op te lossen : beschouw $n \geq 3$ lineaire vormen in de variabelen x, y en z (u is vast b.v. = 1).

(3) $$a_k x + b_k y + c_k z + d_k u \qquad (k = 1,\ldots n)$$

Bepaal nu x, y, z zodanig dat

(4) $$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{r_k}(a_k x + b_k y + c_k z + d_k u)^2$$

minimaal is. Dit is het geval als $\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial z} = 0$ waarin dus o.a.

(5) $$\frac{\partial S}{\partial x} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{r_k}(a_k x + b_k y + c_k z + d_k u)$$

Er zijn nu n vergelijkingendraden, terwijl vier transformatoren (X, Y, Z, U) in gebruik zijn. De netspanning wordt op U i.p.v. op X aangebracht. Door de werking van de compensatoren volgt voor de stromen

(6)
$$a_1 i_1 + a_2 i_2 + \ldots + a_n i_n = 0$$
$$b_1 i_1 + b_2 i_2 + \cdots + b_n i_n = 0$$
$$c_1 i_1 + c_2 i_2 + \cdots + c_n i_n = 0$$

Het spanningsverval in elke vergelijking-draad is nu natuurlijk niet nul (er zijn slechts vier vrijheidsgraden). Analoog met (2) gelden nu de vergelijkingen

(7) $$a_k x + b_k y + c_k z + d_k u = r_k i_k \quad (k = 1,\ldots n).$$

Uit (6) en (7) volgt, dat voor de E.M.K. per windir x, y, z de minimumvoorwaarden $\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial z} = 0$ vervuld zijn. Immers wegens (7) is (4) aequivalent met $\frac{\partial S}{\partial x} = \sum_{k=1}^{n} a_k i_k = 0$ en dit is juist wegens (6).

Analoog $\frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial z} = 0$. Hebben we de wortels van het minimumprobleem bepaald, dan kunnen we met de machine door substitutie de residuen bepalen en met de verkregen wortels eventueel een tweede approximatie toepassen.

NUMERIEKE en GRAPHISCHE METHODEN.

Monotoon invariante statistiek.

Statistisch onderzoek werkt over het algemeen met het begrip "gemiddelde" en de begrippen, die hieruit voortvloeien, zoals "middelbare afwijking", "correlatiecoefficient" enz. Er zijn echter gevallen, waarin deze begrippen tekort schieten. Wat zoudt U b.v. zeggen van het begrip "gemiddelde stad van een land", d.w.z. de stad, waarvan het aantal inwoners het gemiddelde (of ongeveer het gemiddelde) is van de aantallen inwoners van alle steden van dat land ? Past men deze definitie in een practisch geval toe, dan blijkt het reslutaat zeer sterk af te hangen van wat ik nog in de lijst van steden opneem. Ga ik tot 500 inwoners, dan kan het aantal plaatsen dubbel zo groot worden als bij een ondergrens à 1000 inwoners, en de "gemiddelde plaats" wordt dienovereenkomstig een geheel andere. Wil men de lijst van plaatsen van een land statistisch vereenvoudigen, dan zal men veeleer een parameter van het volgende type berekenen: men rangschikt de plaatsen volgens hun grootte en zoekt de plaats, die het totaal aantal inwoners in twee gelijke delen verdeelt - laten we zeggen, dat die 50.000 inwoners telt - , dan constateren we, dat de helft der bevolking in plaatsen met $\geqq$ 50.000 inwoners woont, en de andere helft in plaatsen met $\leqq$ 50.000 inwoners. Zulk een getal kan een waardevol criterium opleveren, wanneer ik b.v. de urbanisatie van een land wil kenschetsen of met die van een ander land vergelijken.

Een ander voorbeeld: In een klas is een opstel gemaakt; de onderscheiden opstellen zijn met cijfers 0 - 10 gewaardeerd. Wat is de"gemiddelde prestatie". Ook deze vraag is niet doeugdelijk. Door de opstellen van cijfers te voorzien. heb ik ze volgens hun kwaliteit gerangschikt. Maar of twee opstellen met een 8 en een 9 evenzeer van elkaar verschillen als twee andere met een 3 en een 4 zal niemand kunnen zeggen. Ik heb immers aan die opstellen geen cardinaalgetallen gehecht, die mij zeggen, hoeveel eenheden van een zeker iets erin bevat zijn, maar slechts cardinaalgetallen, die niets anders dan een volgorde bepalen. Ordinaalgetallen op te tellen dat is ongeveer even zinvol als rekenkundige bewerkingen met telefoonnummers uit te voeren. Wil men uit de opstelcijfers een statistische conclusie trekken, dan zal dit b.v. zijn : het middenste opstel uit te zoeken, d.w.z. dat opstel, dat in de rangorde alle opstellen in twee even grote delen deelt. Men kan dus de middens van twee verschillende klassen met elkaar vergelijken.

Er zijn ook meer mathematische redenen, om het gemiddelde wel eens te verwerpen. Ik pleeg het gemiddelde van een statistisch universum (b.v. de gemiddelde Nederlander wat de lengte betreft) te schatten op

grond van het feit, dat in het mathematisch geïdealiseerde geval van oneindige universa de gemiddelden over steekproeven ter lengte n met $n \rightarrow \infty$ in waarschijnlijkheid convergeren tot het "ware" gemiddelde over het hele universum (d.w.z. de steekproeven, waarvan het gemiddelde valt buiten een voorgeschreven interval rond het ware gemiddelde, bezitten samen een kans, die met $n \rightarrow \infty$ tot 0 nadert). Er zijn echter mathematische verdelingen, waarbij deze convergentie-stelling niet geldt; hun gemiddelde is dus empirisch niet vast te stellen.

Nu zijn er empirische verdelingen, die op deze mathematische verdelingen enigszins lijken. Ik had kort geleden te maken met observatiereeksen: het C_u-gehalte van de lever van paarden en runderen. (Onderzoek van de Heer R. Bijkork). Als volgt enige observatiereeksen. Elk getal geeft aan het C_u-gehalte van één dier.

I. Normale runderen. Aantal 55.

0.48 - 0.52 - 0.52 - 0.56 - 0.56 - 0.56 - 0.60 - 0.64 - 0.68 - 0.68
0.76 - 0.76 - 0.80 - 0.80 - 0.82 - 0.88 - 0.88 - 0.88 - 0.90 - 0.92
0.92 - 0.92 - 0.92 - 0.96 - 1.00 - 1.02 - 1.04 - 1.04 - 1.06 - 1.08
1.14 - 1.16 - 1.36 - 1.40 - 1.92 - 2.06 - 2.14 - 2.28 - 2.64 - 2.92
2.94 - 4.12 - 4.16 - 4.52 - 5.20 - 5.70 - 5.82 - 6.56 - 6.82 - 6.98
7.62 - 8.52 - 8.54 - 9.08 - 19.4 -

II. Runderen met leverafwijkingen. Aantal 59.

0.48 - 0.52 - 0.52 - 0.52 - 0.56 - 0.56 - 0.56 - 0.56 - 0.64 - 0.64
0.68 - 0.68 - 0.72 - 0.72 - 0.72 - 0.74 - 0.76 - 0.76 - 0.78 - 0.80
0.82 - 0.84 - 0.88 - 0.88 - 0.88 - 0.88 - 0.92 - 0.92 - 0.92 - 0.96
1.00 - 1.00 - 1.02 - 1.04 - 1.04 - 1.04 - 1-04 - 1.08 - 1.16 - 1.18
1.20 - 1.24 - 1.56 - 1.58 - 1.92 - 1.94 - 2.00 - 2.14 - 2.18 - 2.62
2.68 - 2.74 - 4.20 - 4.26 - 4.28 - 6.38 - 8.28 - 8.98 - 15.4

III. Runderen lijdende aan t.b.c. Aantal 49.

0.48 - 0.52 - 0.56 - 0.56 - 0.60 - 0.64 - 0.64 - 0.64 - 0.64 - 0.64
0.66 - 0.68 - 0.70 - 0.72 - 0.72 - 0.72 - 0.72 - 0.72 - 0.76 - 0.76
0.80 - 0.82 - 0.82 - 0.88 - 0.88 - 0.88 - 0.88 - 0.90 - 0.92 - 0.92
0.92 - 0.96 - 1.00 - 1.04 - 1.04 - 1.04 - 1.18 - 1.22 - 1.22 - 1.30
1.38 - 1.58 - 2.62 - 8.28 - 9.48 - 23.8 - 24.6 - 25.1 - 51.6

U kunt van deze rijen natuurlijk gemiddelden, middelbare afwijkingen enz. vormen, maar U voelt zelf wel, dat dit weinig zin heeft. Het verschil tussen de gemiddelden staat mij niet toe conclusies te trekken t.a.v. de samenhang tussen C_u-gehalte en bepaalde ziekten. De verdelingen zijn niet normaal en nog veel erger: één enkel dier, zoals in III dat met 51,6 - beinvloedt het gemiddelde zodanig, dat het vermoeden

gerechtvaardigd is, dat de steekproefgemiddelden hier niet naar het ware gemiddelde convergeren. Typisch van alle drie groepen is, dat de lagere helft uit dicht bij elkaar liggende waarden bestaat, en dat hogerop ineens grote sprongen optreden. Men ziet dus, dat de grootte van de afzonderlijke getallen een gegeven is, waarvan men niet te veel in de te berekenen statistische parameters mag opnemen. Maar wat blijft er dan nog over om conclusies uit te trekken ?

In alle voorbeelden , die ik heb gegeven, was het gemeenschappelijke, dat zekere elementen in een bepaalde orde waren gegeven. Men kan zich nu tot taak stellen statistische parameters hieruit te berekenen , die monotoon invariant zijn, die de orde behouden. Zulke invarianten zijn sinds lang bekend. We hebben b.v. de "mediaan", de middelste waarde van een rij gegevens, of bij een mathematisch gegeven verdeling, de (of een) waarde M, zodat de waarschijnlijkheid van $x < M$, $wh(x<M) = \frac{1}{2}$ en dus ook de wh $(x \geqq M) = \frac{1}{2}$ is. (Niet iedere verdeling bezit een mediaan) Generalisaties hiervan zijn de quartilen, percentilen of algemener het α - quantil, d.w.z. een x_α ,zodat wh $(x < x_\alpha) = \alpha$, $wh(x \geqq x_\alpha) = 1 - \alpha$. Met dergelijke begrippen zullen we ons bezig houden.

d.w.z. invariant t.o.v. alle transformaties,

II.

Het centrale probleem van de moderne statistiek is : Gegeven een universum; men wenst er een statistische parameter (b.v. het gemiddelde) van te kenne. Men neemt een steekproef en tracht met dit gegeven de parameter te schatten. B.v. uit een urne bevattende witte en zwarte balletjes heeft men een steekproef van 10 genomen; welke comclusies kan men uit de verdeling in deze steekproef trekken ?

Uiteraard geen enkele (die de feitelijke steekproef te boven gaat) zolang men alleen categorische beweringen toelaat. Mogen die beweringen echter zelf een waarschijnlijkheidskarakter bezitten, dan bevindt men zich in een gunstiger situatie. Maar wat betekent het als ik zeg, dat een urne waaruit ik een steekproef van 10 met 5 witte en 5 zwarte balletjes heb getrokken, "waarschijnlijk" even veel witte als zwarte balletjes bevat. Vroeger heeft men deze bewering als volgt geinterpreteerd: Ik beschouw het universum van alle mogelijke urnes; mijn steekproef wordt verkregen door eerst een urne te kiezen en dan in de urne 10 balletjes; ik bereken nu de kans, dat de werkelijke steekproef afkomstig was uit een urne met een bepaalde eigenschap. Tegenwoordig bedient men zich van het volgende schema: Ik stel voor mezelf een gedragslijn vast, die ik wens te volgen, b.v. de gedragslijn de uitspraak te doen "in de urne zijn minstens even veel witte als zwarte balletjes" zodra een steekproef van 10 stuks 7 of meer witte balletjes bevat. Het universum waarmee ik te maken heb in mijn vermoeden, "de urne bevat "waarschijnlijk" meer witte dan zwarte balletjes" is nu niet meer de verzameling

van de urnes, maar de verzameling van de afspraken, die ik volgens mijn gedragslijn verplicht ben te doen (of die steekproeven uit verschillende of steeds maar uit dezelfde urne worden getrokken, doet er niets toe; alleen moeten de steekproeven in 't geheel "eerlijk" zijn). De beweringen volgens mijn gedragslijn blijken nu in ten hoogste 17 % van alle mogelijke gevallen niet uit te komen, of: zij blijken in minstens 83 % van alle mogelijke gevallen juist te zijn.

Helaas is een schatting van het gemiddelde op grond van dergelijke methoden slechts in bijzondere gevallen mogelijk b.v. als men weet, dat de verdeling "normaal" is. In elk geval moet men nog diepingrijpende veronderstellingen maken. Bij frequentie-kwesties, waaraan het urnenschema ten grondslag ligt, is dit zonder bezwaar mogelijk. Bij andere gegevens (anthropometrische data of b.v. de boven aangegeven observatiereeksen) is dat zeer bezwaarlijk.

Het eigenaardige is nu, dat men de mediaan van een verdeling uit een steekproef kan schatten, zonder iets over de verdeling te veronderstellen, behalve, dat zij een mediaan bezit. Laat uit een groot materiaal een steekproef van 10 zijn getrokken (b.v. C_u-gehalte van de lever van 10 koeien). We kiezen de volgende gedragslijn: we maken telkens de uitspraak, dat de ware mediaan ligt tussen de twee uiterste van de steekproef. Wanneer kan deze bewering mis zijn ? Uitsluitend, wanneer per ongeluk alle 10 exemplaren hetzij links, hetzij rechts van de mediaan zijn gekozen. De kans een element links van de mediaan te kiezen is ½; voor rechts ook ½. De kans alle 10 rechts of links van de mediaan te kiezen is $(\frac{1}{2})^{10}$, samen $(\frac{1}{2})^{9} = 0{,}2$ %. Mijn bewering zal dus in 99,8 % van alle gevallen juist zijn. Ik bepaal nu een iets scherpere gedragslijn: We spreken af de mediaan te schatten tussen het 2e en het 9e element van de steekproef. Deze bewering zal behalve in de reeds genoemde nog mis zijn in de gevallen, dat 1 element links en 9 rechts van de mediaan worden gekozen en wanneer 9 links en 1 rechts worden gekozen. Beide resultaten zijn op 10 verschillende wijzen te realiseren, bezitten dus samen de kans 20. $(\frac{1}{2})^{10}$, en samen met de reeds behandelde 22. $(\frac{1}{2})^{10} = 2$ %. Onze gedragslijn leidt dus tot beweringen met een kans 98 % op juistheid - Willen we onze beweringen nog eens verscherpen, dan kunnen we b.v. de bewering afspreken: De mediaan ligt tussen het 3e en 7e element van de steekproef. Hier krijgen we dus als percentage onjuiste beweringen

$$2\left(\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 11\ \% \quad .$$

Algemeen kunnen we zeggen: zij de lengte van de steekproef n. Zij $0 < s \leqq n$. Zij het s^{de} element $\geqq (s-1)^{de}$ element. We beweren: de ware mediaan M is $\leqq$ het s^{de} element van de steekproef. Deze bewering komt

uit als hoogstens s-1 elementen links van de mediaan zijn gekozen, en alleen dan. Deze keuze bezit een kans

$$\sum_{\nu \leqslant s} \binom{n}{\nu} 2^{-n}$$

Voor grote n kan men deze uitdrukking vervangen door

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{2s-2-2n}{\sqrt{n}}} e^{-x^2/2}\, dx$$

De kans op de juistheid van de bewering" M > s-de element" is de complementaire, dus

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{n-2s+2}{\sqrt{n}}}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx$$

Deze uitdrukkingen zijn uit tafels te berekenen.

Hiervan kan men zich bedienen, om vast te stellen, of er een verschil tussen de ware medianen is (significantie-onderzoek). Men vindt b.v. de medianen (zie steekproeven C_u-gehalte in lever):

	$M_I > 0{,}92$	99 % wh.	$M_I > 0{,}96$	89 %
	$M_{III} \leqq 0{,}92$	84 % wh.	$M_{III} \leqq 0{,}96$	97 %
Dus	$M_I > M_{III}$	83 % wh.	$M_I > M_{III}$	86 %

Men kan deze schattingsmethode echter verscherpen. Stel we hebben twee observatierijen

$$A = a_1, \ldots, a_m \quad (a_\mu \leqq a_{\mu+1})$$

en $$B = b_1, \ldots, b_n \quad (b_\nu \leqq b_{\nu+1})\ .$$

De bewering $M_A > M_B$ kan als disjunctie worden geschreven van de beweringen

$$(a_{\mu'} < M_a \leqq a_\mu) \ \&\ (M_b \leqq b_\nu)$$

waarbij μ willekeurig is, μ' het grootste getal zodat $a_{\mu'} < a_\mu$ is en ν het grootste getal, zodat $b_\nu \leqq a_{\mu'}$ is. Elk van deze beweringen heeft een wh.

$$\sum_{i=\mu'-1}^{\mu-1} \binom{m}{i} 2^{-m} \sum_{i\ \nu} \binom{n}{i} 2^{-n}$$

Van deze uitdrukkingen moet de som over μ worden gevormd. Approximatief kunnen we schrijven:

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{\mu'=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu - \frac{m+3}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\right)^2\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\nu-1-n/2}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}} e^{-x^2/2}$$

Dit kan weer uit tafels worden berekend. Hierbij leveren de termen met kleine ν de bijdrage 0; bij grote ν worden de integralen practisch 1, zodat men de resterende som tot een integraal kan samenvatten.

Toegepast op de voorbeelden I, II en I, III geeft dit een wh = 75 % voor de beweringen

$$M_I > M_{II} \quad \text{en} \quad M_I > M_{III} \ .$$

Schattingen zoals hier voor de mediaan gegeven , kan men ook voor de quantilen vinden. De bewering α -quantiel < s-de element, bezit de wh op juistheid

$$(*) \qquad \sum_{\nu<s} \binom{n}{\nu} \alpha^{\nu} (1-\alpha)^{n-\nu}$$

Om b.v. de significantie van de 51,6 in III vast te stellen, kan men een α -quantiel van III met één van I + II vergelijken. Nemen we

$$\alpha = 0{,}98$$

dan wordt: α - quantil van I + II $\leqq$ 19,4 met wh. 90 %
en : α - quantil van III $>$ 25,1 met wh. 75 %
Dus : α - quantil van I + II < α-quantil van III met wh. 65 %;
of met

$$\alpha = 0{,}973$$

α -quantil I + II $\leqq$ 19,4 wh. 96 %
" " III $>$ 23,8 " 95 %
dus α -quantil I +II < α-quantil III wh 91 % .

Voor de berekening van zulke uitkomsten merke men op: Voor een α, die weinig van 0 of 1 verschilt, moet (*) met de formule van Poisson worden benaderd. De α, waarover men nog vrij mag beschikken, wordt dan zo gekozen, dat de wh, die uitkomt, maximaal is (maximumvraagstuk uit de differentiaalrekening). Voorbeeld:

$$\text{wh}\,(\alpha\text{-quantil van III} > 25{,}1) = \alpha^{49} + 49\,\alpha^{48}(1-\alpha)$$

$$\text{wh}\,(\alpha\text{-quantil van I + II} \leqq 19{,}4) = 1 - \alpha^{114}$$

Samen

$$49\,\alpha^{48} - 48\,\alpha^{49} + 1 - \alpha^{114}$$

Gedifferentieerd:

$$49.48.\alpha^{47} - 49.\,48.\,\alpha^{48} - 114.\,\alpha^{113} = 0$$

$$49.\,48 - 49.\,48.\,\alpha - 114.\,\alpha^{66} = 0$$

Men stelle nu $\alpha = 1 - \frac{P}{66}$, $\alpha^{66} \sim e^{-P}$ zodat

$$\frac{49.\,48.\,P}{66} - 114\,e^{-P} = 0$$

wat geeft P = 1,3 , α = 0,98.

III.

We onderzoeken nog de efficiency van de aangegeven schatting voor de mediaan. Die luidde als volgt: Wensen we een uitspraak met de kans $1 - \varepsilon$ op juistheid te maken, dan berekenen we γ volgens

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\gamma} e^{-x^2/2} \, dx = 1 - \varepsilon$$

en schatten de Mediaan M door

$$M \leqq \text{s-de element}$$

waar

$$\frac{2s - 2 - n}{\sqrt{n}} = \gamma$$

is, of

$$s = \frac{n+1}{2} + \frac{\gamma}{2} \sqrt{n}.$$

Om vast te stellen of deze schatting bevredigend is, moeten we weten waar wij het s-de element ongeveer aantreffen. Ik bereken nu de kans, dat het s-de element $> \beta$ - quantil is voor

$$\beta = \frac{1}{2} + \frac{\gamma'}{2\sqrt{n}}$$

Deze kans is

$$\sum_{\nu \leqq s} \binom{n}{\nu} \beta^{\nu} (1 - \beta)^{\nu}$$

dus ongeveer

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{s - n\beta}{\sqrt{n\beta(1-\beta)}}} e^{-x^2/2} \, dx$$

De bovengrens vdor deze integraal is asymptotisch gelijk aan $\gamma' - \gamma$, dus wordt de gevraagde kans asymptotisch

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\gamma - \gamma'} e^{-x^2/2} \, dx$$

Speciaal ziet men, dat deze kans voor $\gamma' - \gamma$ juist $\frac{1}{2}$ is. Van de verzameling der s-de elementen is dus de $(\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2\sqrt{n}})$-de quantil de mediaan.

De mediaan van mijn schattingen volgens afspraak convergeert dus met n naar de mediaan van het universum, en wel met een fout van de orde $\frac{\gamma}{2\sqrt{n}}$ (gemeten in quantilen).

Vergelijkt men deze efficiency met die van de gebruikelijke schatting van het gemiddelde, dan moet men zich beperken tot normale verdelingen (met bekende middelbare afwijking b.v. = 1). Men vindt, als

men uitspraken met de wh $1 - \varepsilon$ wil maken, het ware gemiddelde $\leqq$ steekproef-gemiddelde + $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Aangezien de steekproef-gemiddelden even vaak links als rechts van het universum-gemiddelde liggen, is de schattingsfout hier gemiddeld (asymptotisch) = $\sigma/\sqrt{n}$. Bij de mediaan was het in quantilen gemeten $\sigma/2\sqrt{n}$, dus omdat we ons bij de maximumordinaat $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ van de normale verdeling bevinden, in abcissen gemeten, $\sqrt{2\pi}$ -keer zo groot, dus $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \sigma/\sqrt{n}$

De schatting van de mediaan is dus ongunstiger dan die van het gemiddelde. Weet men niets af over de verdelingswet, dan heeft de mediaan het voordeel, dat men alle hypothesen kan vermijden (behalve die, dat de mediaan bestaat).

Numerieke en Graphische Methoden.

Monotoon invariante Statistiek (Vervolg). Ook als iets over de ware verdelingsfunctie bekend is, kan de mediaan gunstigere resultaten opleveren dan het gemiddelde. Is $f(x)dx$ de waarschijnlijkheidsdichtheid met de (onbekende) mediaan bij $x=m$, dan is de fout van de steekproefmediaan gemeten in quantielen, dus $\sim \frac{\gamma}{2\sqrt{n}}$; die van het gemiddelde is $\frac{\gamma\sigma}{\sqrt{n}}$. De mediaan wordt dus asymptotisch gunstiger, zodra

(*) $2f(m)\sigma > 1$ is, d.w.z. bijzonder gunstig bij verdelingen met een grote waarschijnlijkheidsdichtheid bij de mediaan. Bij de voorbeelden is dit het geval (volgens de steekproef): (*) is (geschat) 4, 3, 12.

IV

De volgende variatie op de voorgestelde methode, om de mediaan te schutten, verdient nog enige aandacht. We stellen vast, dat de mediaan M aan de ongelijkheid

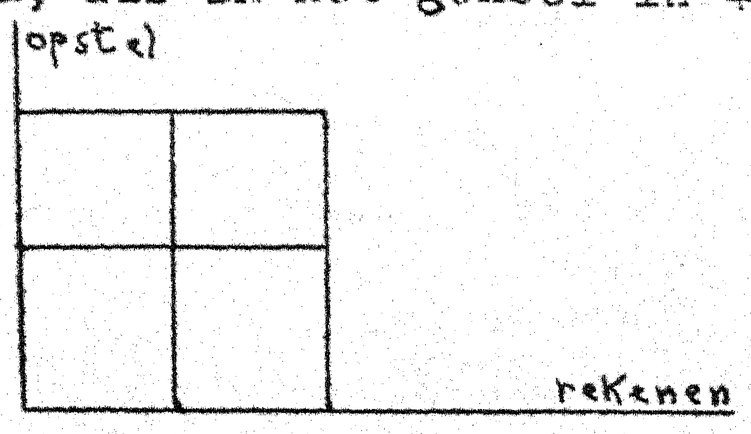
$$a_{s-1} < M \leqq a_s$$

voldoet met een kans op juistheid $\binom{n}{s}2^{-n}$. Men zou dus de mediaan kunnen schatten als gemiddelde van de a 'en, voorzien van de gewichten $\binom{n}{\nu}2^{-n}$, precieser door: $2^{-n}\sum_{\nu=1}^{n}\binom{n}{\nu}\frac{a_{\nu-1}+a_\nu}{2} \sim 2^{-n}\sum_{\nu=1}^{n}\binom{n}{\nu}a_\nu$

Deze uitdrukking convergeert in waarschijnlijkheid naar de mediaan, indien de verdelingsfunctie $f(x)$ enigszins vlug naar 0 gaat (met $x \to \pm\infty$). Precieser constateringen over het toelaatbare asymptotische gedrag van $f(x)$ kan ik echter niet mededelen; waarschijnlijk convergeert deze schatting van de mediaan door "gewogen gemiddelden" nog in gevallen, waarin het gewone gemiddelde niet convergeert.

V

Ik behandel nog correlatiebegrippen, die op het voorafgaande zijn gebaseerd. Stel het geval, dat wij een rekentest en een opsteltest hebben toegepast op een klas van 40 leerlingen. Naar beide testen kan men de leerlingen rangschikken, en men kan zich afvragen of er een verband bestaat tussen de rekenvaardigheden en de stilistische vaardigheden van de leerlingen. Hiervoor deelt men b.v. de leerlingen in twee groepen, een slechte en een goede, volgens beide criteria, dis in het geheel in 4 groepen. In de beide linkerhokjes samen bevindt zich de slechte helft t.o.v. rekenen; in de beide hokjes beneden samen de slechte helft t.o.v. opstel. Is er strikte afhankelijkheid in positieve zin tussen reken- en stijlvaardigheden, dan zullen de hokjes links boven

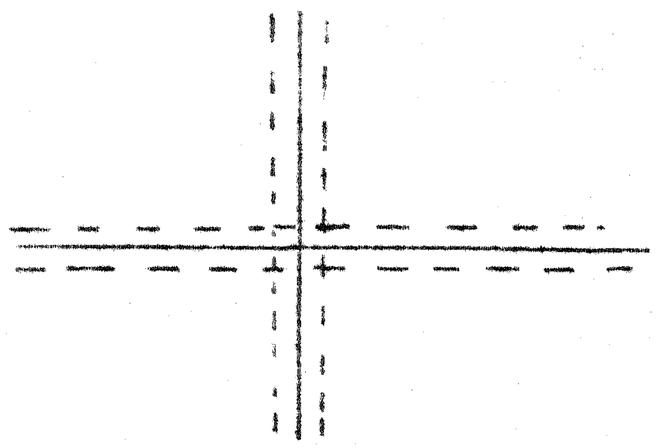


en rechts onderaan leeg zijn; zijn die twee bekwaamheden elkaars tegengestelden, dan zullen juist de twee andere hokjes leeg zijn. Bestaat er geen enkel verband (correlatie) tussen beide bekwaamheden, dan zitten in elk hokje precies evenveel (10) leerlingen.

Het percentage p in het linker benedenhokje kan als correlatiemaat worden gebezigd: $p = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$,0 bij positieve afhankelijkheid, onafhankelijkheid, negatieve afhankelijkheid. (Gebruikelijker is 4p - 1, maar voor de navolgende beschouwingen is p gemakkelijker).

Aangezien niet de speciale klas ons interesseert, maar de schoolbevolking als geheel, trachten we weer uit de gegevens van de steekproef conclusies t.o.v. het "universum" te trekken.

We gaan eerst weer de ware mediaan in horizontale en in verticale richting totaliseren door middel van onze steekproef. De (onbekende) ware medianen zijn met een zekere waarschijnlijkheid tussen de met hen evenwijdige stippellijnen gelegen.



Wil ik de ware p naar beneden schatten, dan vervang ik het ware linkerhokje met zijn onbekende grenslijnen door het hokje, dat door stippellijnen is begrensd en dat met zekere waarschijnlijkheid $1 - \varepsilon$ in het ware hokje is bevat.
Hierin bevindt zich het gedeelte p' van de schoolbevolking; $p' \leqq p$ (met wrschhd. $1-\varepsilon$). Ook p' is onbekend, maar wel kennen we het percentage p'' van onze steekproef in dat gestippeld omlijnde hokje. Nu kan men volgens klassieke methoden p' op grond van p'' (met waarschijnlijkheid) schatten. Wenst men een uitspraak $p' \geqq p'' - \delta$ met een kans op juistheid $\geqq 1-\varepsilon'$ te maken, dan kiest men δ zo dat

$$\sum_{\nu=0}^{np''} \binom{n}{\nu} (p''-\delta)^{\nu} (1-p''+\delta)^{n-\nu} \geqq 1-\varepsilon'$$

is (n = lengte van de steekproef).

We hebben dus

$$p' \geqq p'' - \delta$$

en $$p \geqq p'$$

met resp. waarschijnlijkheden $1-\varepsilon'$ en $1-\varepsilon$ en trekken hieruit de conclusie

$$p \geqq p'' - \delta$$

met de waarschijnlijkheid $1 - (\varepsilon + \varepsilon') + \varepsilon\varepsilon'$.

Een schatting van p naar <u>boven</u> wordt op een analoge manier verkregen.

De hier beschreven methode, om p te schatten, is nog vrij ruw; zij kan worden verscherpt in dezelfde geest als op blz.5 de bepaling van het verschil tussen twee medianen.